ORSAY
Série A
7

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir le titre de Docteur Ingénieur

par

Jacques ARNAUD

Première Thèse : "Structures multipériodiques pour tubes à propagation d'onde de grande puissance. Application au Maser".

Deuxième Thèse : Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 8 Avril 1963 devant la Commission d'examen

MM. GRIVET Président

BERTEIN, BLAQUIÈRE, SEPTIER } Examinateurs

ORSAY
Série A
7

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir le titre de Docteur Ingénieur

par

Jacques ARNAUD

- Première Thèse : "Structures multipériodiques pour tubes à propagation d'onde de grande puissance. Application au Maser".

- Deuxième Thèse : Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 8 Avril 1963 devant la Commission d'examen

MM. GRIVET — Président

BERTEIN
BLAQUIÈRE
SEPTIER — Examinateurs

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549214_0048

ORSAY
Série A
7

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir le titre de Docteur Ingénieur

par

Jacques ARNAUD

Première Thèse : "Structures multipériodiques pour tubes à propagation d'onde de grande puissance. Application au Maser".

Deuxième Thèse : Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 8 Avril 1963 devant la Commission d'examen

MM. GRIVET Président

BERTEIN
BLAQUIÈRE } Examinateurs
SEPTIER

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE DE PARIS

FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

PROFESSEURS

Le Doyen ..... M. ZAMANSKY

PRENANT	T	Anatomie & histologie comparée
GRASSE	T	Evolution des êtres organisés
PREVOST	T	Chimie organique
WYART	T	Minéralogie & cristallographie
TEISSIER	T	Zoologie
AUGER	T	Physique quantique & relativité
MONNIER	T	Physiologie générale
PIVETEAU	T	Paléontologie
ROCARD	T	Physique E.N.S.
CARTAN	T	Mathématiques E.N.S.
LAFFITTE	T	Chimie générale
N	T	Géométrie supérieure
COULOMB	T	Physique du Globe
Mlle COUSIN	T	Biologie animale SPCN
CHRETIEN	T	Chimie minérale
BOCQUET	T	Zoologie
KASTLER	T	Physique E.N.S.
EPHRUSSI	T	Génétique
GAUTHERET	T	Biologie végétale CPEM
LUCAS R.		Recherches physiques
THOMAS A.	T	Biologie
MORAND	T	Physique enseignement
SOLEILLET	T	Physique CPEM
FORTIER	T	Mécanique Expérimentale des fluides
DRACH	T	Zoologie
QUENEY	T	Météorologie & dynamique de l'atmosphère
GALLIEN	T	Embryologie
EICHHORN	T	Botanique
DE CUGNAC	T	Biologie végétale SPCN
Mlle CAUCHOIS	T	Chimie physique
THELLIER	T	Physique du Globe
PONCIN	T	Mécanique Générale
DUBREIL	T	Arithmétique & théorie des nombres
QUELET	T	Chimie organique
CAGNIARD	T	Géophysique appliquée
CHAMPETIER	T	Chimie macromolécul.
CUVILLIER	T	Micropaléontologie
JUNG	T	Géologie
TRILLAT	T	Microscopie & diffraction électronique
WIEMANN	T	Chimie organique & structurale
VASSY	T	Physique de l'atmosphère
DESTOUCHES	T	Théorie physique
AMIEL	T	Chimie générale
HOCART	T	Minérallogie & cristallographie
J.P. MATHIEU	T	Physique optique
COUTEAUX	T	Cytologie
CHOQUET	T	Théorie des fonctions & topologie
FELDMANN	T	Biologie végétale marine
JOST	T	Physiologie comparée
FORTET	T	Calcul des probabilités & physique mathématiques

SCHWARTZ	T	$C_a$lcul différentiel & intégral
CHOUARD	T	Physiologie végétale
MALAVARD	T	Aviation (technique aéronautique)
BRELOT	T	Analyse supérieure
NORMANT	T	Synthèse organique
BENARD	T	Chimie appliquée
DUGUE	T	statistique mathématique
SOULAIRAC	T	Psychophysiologie
ULRICH	T	Physiologie végétale appliquée
KIRRMANN	T	Théories chimiques
CHADEFAUD	T	Botanique
Mlle LE BRETON	T	Physiologie de la nutrition
LELONG	T	Application de l'analyse à la géométrie
DEVILLERS	T	Anatomie & histologie comparées
EHRESMANN	T	Topologie algébrique
FRANCON	T	Physique SPCN
GLANGEAUD	T	Géographie physique géologie dynamique
DODEMENT	T	Mathématiques MGP
PISOT	T	Technique mathématique de la physique
ROCH	T	Géologie
SCHATZMANN	T	Astrophysique
TERMIER	T	Géologie générale
ZAMANSKY	T	Mathématiques générales
LENNUIER	T	Physique M.G.P.
ROUTHIER	T	Géologie appliquée
Mme TONNELAT	T	Physique théorique
DIXMIER	T	Mathématiques M.P.C.
SOUCHAY	T	Chimie générale
AIGRAIN	T	Electronique
BRUSSET	T	Chimie systématique
LEVY	T	Physique théorique des hautes énergies
Mme CHAIX	T	Chimie Biologique
Mme HUREL PY	T	Biologie végétale CPEM
PANNETIER	T	Chimie générale I
BRUN	T	Mécanique des fluides I
Mme DUBREIL	T	Mathématiques (agrégation)
Mme LELONG	T	Mathématiques II
BELLAIR	T	Géologie SPCN
COTTE	T	Physique électricité
DUBOIS J.E.	T	Chimie organique physique
LAMOTTE	T	Zoologie ENS
OLMER	T	Energétique générale
GAUTHIER	T	Mécanique appliquée
BARCHEWITZ	T	Chimie physique
BROSSEL	T	Physique atomique
BUSER	T	Physiologie comparée
CAMUS	T	Physiologie végétale
CURIEN	T	Minéralogie & cristallographie
POSSOMPES	T	Zoologie
PULLMANN	T	Chimie quantique
TEILLAC	T	Physique nucléaire & radio-activité
VILLE	T	Econométrie
WILLEMART	T	Chimie CPEM
FREYMANN	T	Recherches physiques
ROLLET	T	Chimie minérale
Melle JOSIEN	T	Chimie SPCN
CHEVALLEY	T	Géométrie algébrique & théorie des groupes
GERMAIN	T	Mécanique théorique des fluides
LUCAS G.	T	Géologie
ALLARD	T	Chimie physique
BERTHELOT	T	Physique des particules fondamentales
BRICARD	T	Météorologie
Mme ALBE-FESSARD	T	Psycho-physiologie
JULIA	T	Etude des molécules naturelles complexes

MAGAT	T	Physico-chimie des rayonnements
Mlle QUINTIN	T	Electrochimie
MONOD	T	Chimie du métabolisme
DE POSSEL	T	Analyse numérique
CHARLOT	T	Chimie analytique
CHATELET	T	Chimie CPEM
MATTLER	T	Physique SPCN
BOUISSIERES	T	Radiochimie
Mme COUTURE	T	Thermodynamique & mécanique physique
FRANC	T	Biologie animale CPEM
SCHNELL	T	Botanique tropicale
STOLKOWSKI	T	Physiologie générale
ACHER	T	Chimie biologique
BAUDOIN	T	Biologie animale CPEM
BEAUMONT		Biologie animale SPCN
BLAMONT		Geophysique ionosphère
BOUREAU	T	Botanique
CURIE D.		Physique MGP
DURAND DELGA	T	Géologie
HELLER	T	Physiologie végétale
TORTRAT	T	Calcul des probabilités
CAILLEUX	T	Géologie SPCN
MAGNAN		Physique électricité
DAUDEL	T	Mécanique ondulatoire
Melle FOURCROY		Biologie végétale SPCN
Mme CHOQUET BRUHAT		Mécanique analytique & mécanique céleste
Melle VEIL	T	Physiologie générale
LWOFF	T	Microbiologie
SIESTRUNCK	T	Mécanique physique & expérimentale
CABANNES	T	Mécanique générale
CAIRE	T	Géorgraphie physique & géologie dynamique
COMOLET		Mécanique des fluides
DELLOUE	T	Physique de l'exosphère
HOUILLON		Biologie animale CPEM
OLIVIER		Anthropologie
SAMUEL	T	Mathémathiques (ENS Jeunes filles)
THIRY	T	Mécanique céleste
ABELES	T	Physique SPCN
AMAT	T	Thermodynamique
AUBOIN	T	Géologie
Mme BENOIT-GUEUTAL	T	Physique nucléaire & radio-activité
BOUGIS		Biologie végétale marine Villefranche
RIGAUDY	T	Chimie SPCN
COLLONGUES		Chimie CPEM
DUBERT		Biochimie
NOZIERES		Physique générale
CADIOT		Chimie organique
IVANOFF		Océanographie physique
FRANCOIS		Zoologie
TALBOT		Génie chimique
Mme NOUGAREDE		Botanique
BRUHAT	T	Mathématiques MPC
FOURNET		Electricité générale
DEHEUVELS	T	Mathématiques propédeutique
FURON	T	Géologie SPCN
Mme GANS	T	Génétique
GENEVES		Biologie végétale CPEM
HUPE	T	Pétrographie
HOLLANDE	T	Biologie générale
LIONS	T	Analyse numérique
MAITTE	T	Chimie organique
NICOLAS		Géologie appliquée
PANIGEL		Biologie générale
RAVIER	T	Pétrographie
MOREL F.	T	Physiologie comparée

ROSEAU	T	Mécanique théorique des fluides
ROUBINE		Electronique ESE
SILBER	T	Chimie CPEM
UEBERSFELD	T	Electronique
....	T	Théories physiques
HERVE	T	Mathématiques
Mme PECKER-WIMEL	T	Astrophysique
BALKANSKI		Physique MPC
LE CORRE	T	Electricité
NATAF	T	Physique nucléaire & radio-activité
ECHALIER		Biologie animale CPEM
BARRAUD	T	Physique CPEM
DARS		Géologie structurale & appliquée
CAMEFORT	T	Botanique (agrégation)
VICHNIEWSKY	T	Mécanique industrielle
SIGWALT	T	Chimie SPCN
BLAQUIERE		Electronique
BARUCH		Physique propédeutique
ARNOUS	T	Physique théorique
SLONIMSKI		Génétique
MALLIAVIN	T	Mathématiques propé-deutiques
GAUDEMAR		Chimie propédeutique
BROUSSE	T	Mécanique théorique
ROSCH	T	Astronomie
GUY	T	Physique expérimentale
LAZARD		Mathématiques MPC
MOREL P.		Physique MPC
ARSAC		Programmation
LEFEBVRE		Chimie MPC
BOK		Physique propédeutique
CHAPEVILLE		Biochimie
BENOIT		Physique CPEM
RIO		Chimie CPEM
JAUZEIN		Géologie ENS

PREVOST G.		Biologie végétale
FAVARD P.		Biologie animale C
Mme CHARNIAUX COTTON		Evolution des êtres organisés
Melle FICINI		Chimie CPEM
LEQUEUX		Astronomie
COHEN TANNOUDJI		Physique atomique
TAVERNIER		Physique CPEM
DURAND Michel		Biologie animale S
PASCAUD		Physiologie
Mme PETIT		Biologie animale C
CAGNAC		Physique agrégation
FALK VAIRANT		Physique nucléaire
KRASNER	T	Mathématiques
BENZECRI	T	Statistiques
VINH MAU		Physique MGP
DUQUESNES		Physique CPEM
SCHUTZENBERGER		Programmation
TREMILLON		Chimie MPC
FAYARD		Chimie MPC
BUVET		Chimie CPEM
AUTHIER		Physique MPC
PICINBONO	T	Physique CPEM
BONNEFILLE		Electrotechnique
Mme PUISEUX DAO		Biologie végétale

LE SECRETAIRE GENERAL

R. POULLAIN

UNIVERSITE DE PARIS

FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY

PROFESSEURS

MANGENOT G.	T Biologie végétale	TONNELAT	T Biologie physico-chimique
JACQUINOT P.	T Optique		
GUINIER A.	T Electricité & physique des solides	BRUNN Jan	T Géologie historique
		JEAN M.	T Physique nucléaire
GRIVET P.	T Electronique	BERGERARD J.	T Zoologie
BLANC LAPIERRE A.	T Accélérateur linéaire	ROGER J.	T Paléontologie
L'HERITIER P.	T Génétique des virus	LEFORT M.	T Chimie nucléaire
LEMEE G.	T Ecologie végétale	LAGARRIGUE A.	T Physique des htes énergies
MOYSE A.	T Physiologie végétale	JULLIEN J.	T Chimie structurale organique
DODE M.	T Chimie thermodynamique		
DENY J.	T Mathématiques	ARNULF A.	T Optique
RIVIERE A.	T Géologie générale & sédimentologie	ROUAULT M.	T Diffraction électronique
MICHEL A.	T Chimie minérale	MARECHAL A.	T Optique théorique et appliquée
MAY R.	T Anatomie comparée		
DELANGE H.	T Mathématiques	MAZET R.	T Mécanique générale
CHAPELLE J.	T Physique expérimentale	DAVID Serge	T Chimie agrégation
LACOMBE P.	T Métallurgie	GUERIN H.	T Chimie des gaz et des combustibles
BENOIT P.	T Physiologie générale	LESIEUR L.	T Mathématiques MPC et algèbre
GUINOCHET J.	T Biologie végétale SPCN		
NERON A.	T Mathématiques	KOURGANOFF	T Astronomie
NOZERAN R.	T Botanique approfondie	ARNOULT P.	T Physique électronique
CASTAING R.	T Thermodynamique		
ELLENBERGER F.	Géologie structurale	KAHANE J.P.	T Mathématiques
LEDERER E.	T Chimie biologique	BROCHARD J.	T Physique propédeutique
RIZET J.	T Génétique	Mme ROIZEN	T Physique CPEM
LENDER T.	T Biologie animale SPCN	BERTEIN F.	T Electronique
POITOU G.	T Mathématiques	MALGRANGE B.	T Mathématiques
FREON P.	T Chimie organique	CORABOEUF E.	T Physiologie animale

FRIEDEL J.	T	Physique des solides
CHEVAUGEON J.	T	Cryptogamie
MEYER P.	T	Physique théorique & atomique
LEHMANN P.	T	Accélérateur linéaire
CHABBAL R.	T	Physique propédeutique
DELCROIX J.M.	T	Physique des plasmas
CERF J.	T	Mathématiques
D'ESPAGNAT B.	T	Physique théorique
SCHAEFFER P.	T	Microbiologie
DE GENNES P.	T	Physique des solides
Mme MARTY N.		Physique propédeutique
GOURDIN M.		Physique théorique
PEREZ-Y-JORBA		Physique propédeutique
GORENFLOT E.		Biologie végétale SPCN
RIOU M.		Physique nucléaire
BROUSSE R.		Géologie SPCN
LIORET C.		Physiologie végétale
CLAUSER H.		Chimie biologique
JANCOVICI B.		Physique atomique
LURCAT J.		Physique propédeutique
LE BERRE J.		Entomologie
LAVOREL J.		Biophysique
PERIO P.		Physique propédeutique
FETIZON M.		Stéréochimie
CHEMLA M.		Chimie des isotopes
MAZIERES C.		Chimie SPCN
VILKAS M.		Chimie CPEM
BLANDIN A.		Physique des solides
BRUN G.		Génétique
MERCOUROFF		Physique agrégation
ANDRE J.		Microscopie électronique
CHEVALLIER F.		Physiologie animale
Melle MARCOU		Biologie cellulaire CPEM
BOURDU R.		Physiologie végétal
BERKALOFF A.		Biologie animale CP
Melle LEFORT		Biologie cellulaire CPEM
Mme LAMBERT		Physique CPEM
BIZOT J.C.		Physique MPC
GUIRAUD J.P.		Mécanique
LABOUESSE B.		Chimie SPCN

LES LIGNES MULTIFILAIRES TRI-PÉRIODIQUES (1)

PAR J. ARNAUD,

Centre de Physique Électronique et Corpusculaire
de la C S F-Compagnie générale de télégraphie Sans Fil.

SOMMAIRE. — *De nombreux dispositifs utilisent comme lignes à retard des systèmes multifilaires; c'est le cas des tubes à propagation d'onde et des masers à onde progressive. Des structures complexes bi- ou tri-périodiques ont été déjà utilisées dans des tubes expérimentaux. Cet article expose une généralisation de la théorie des lignes à barreaux permettant de traiter le problème de la propagation d'ondes électromagnétiques dans un réseau de barreaux parallèles comportant des obstacles répartis périodiquement; l'introduction d'une admittance caractéristique matricielle permet de traiter de façon simple le cas d'une disposition doublement périodique des barreaux.*

Le principe de Babinet, applicable aux structures complémentaires est vérifié de façon détaillée. Ces calculs sont précisés dans le cas de trois structures fondamentales comportant deux obstacles et deux barreaux par cellule : la ligne interdigitale multiple; la ligne à barreaux interrompus et la ligne en méandre (ou hélice) multiple. Quelques résultats expérimentaux relatifs à ces réseaux montrent que l'accord avec la théorie est satisfaisant. La méthode exposée permet de calculer simplement une nouvelle structure : la ligne en triple méandre multiple.

(C. D. U. : 621.385.029.6.)

SUMMARY. — *A great number of devices use multi-wire systems for delay lines; this applies to travelling wave tubes and travelling wave masers. Bi-periodical or tri-periodical complex structures have already been used in experimental tubes.*

This article deals with a generalisation of the theory of bar lines for dealing with the problem of the propagation of electromagnetic waves in a system of parallel bars which includes periodically distributed obstacles; the introduction of a matrix characteristic admittance provides a simple means for treating the case of a double periodic arrangement of the bars.

Babinet's principle, applicable to complementary structures, is verified in detail. These calculations are given in the case of three fundamental structures which include two obstacles and two bars per system : the multiple interdigital line; the interrupted bars line and the meander (or helical) line. A few experimental results relative to these systems show that there is satisfactory agreement with theory. The method described provides a simple means for calculating a new structure : the multiple triple meander line. (U. D. C. : 621.385.029.6.)

INHALTSANGABE. — *Zahlreiche Vorrichtungen verwenden als Verzögerungsleitungen Mehradernsysteme; das ist der Fall der Wanderwellenleitungen und der Wanderfeldmaser. Komplexe zweifach- bezw. dreifachperiodische Strukturen sind bereits in Versuchsröhren verwend et werden.*

Dieser Aufsatz legt eine Verallgemeinerung der Theorie der Gitterstableitungen aus, durch die es möglich ist, die Probleme der Fortpflanzung von elektro-mechanischen Wellen in einem

(1) Manuscrit reçu le 2 février 1966.

Cette étude a fait l'objet d'une thèse présentée à la Faculté des Sciences d'Orsay, Université de Paris, intitulée : *Structures multipériodiques pour tube à propagation d'onde de grande puissance. Application au maser*, avril 1963.

Gitter mit parallelen Stäben, welches periodisch verteilte Hindernisse umfasst, zu behandeln. Die Einführung eines Matrizen-Wellen-Leitwertes ermöglicht die einfache Behandlung im einfachen Falle einer doppelt-periodischen Verteilung der Stäbe.

Das Prinzip von Babinet, welches an komplementäre Strukturen anwendbar ist, wird hier genau bestätigt. Die Rechnungen werden im Falle von drei Grundstrukturen mit je zwei Hindernissen und zwei Stäben je Zelle weitergeführt, und zwar im Falle der Mehrfach-Kammleitung mit verschachtelten Zähnen, der Leitung mit unterbrochenen Stäben und der Mehrfach-Mäander- (bezw. Spiral-) Leitung. Einige Versuchsresultate betreffs dieser Gitter zeigen eine gute Uebereinstimmung mit der Theorie. Das ausgelegte Verfahren ermöglicht die verhältnismässig einfache Berechnung einer neu en Struktur : die Dreifach-Märander-Mehradernleitung. (D. K. : 621.385.029.6.)

INTRODUCTION.

Des structures périodiques de formes très variées sont utilisées dans les tubes à propagation d'onde hyperfréquence de type O et M, ainsi que dans les masers à onde progressive, sous le nom de ligne à retard. Elles sont également utilisées dans les accélérateurs de particules et dans certains aériens avec des vitesses de phase voisines de la vitesse de la lumière. Considérées comme des quadripoles passifs ces structures peuvent constituer des filtres hyperfréquences.

Mais l'application essentielle est le tube à propagation d'onde amplificateur ou auto-oscillateur [1]. L'onde retardée [2] ayant une vitesse de phase égale à la vitesse du faisceau électronique une interaction cumulative peut avoir lieu, d'où résulte une amplification ou une oscillation.

Depuis une dizaine d'années, des études ([3], [4], [5]) ont montré que les structures multipériodiques (résultant par exemple de la mise en parallèle d'un certain nombre de structures unipériodiques classiques) permettent d'accroître la puissance des tubes à propagation d'onde en augmentant le volume d'échange d'énergie entre le faisceau et le circuit. Cependant il n'y a pas eu à notre connaissance de réalisation industrielle basée véritablement sur l'emploi des structures multipériodiques, en raison sans doute des progrès très importants qui peuvent être encore réalisés, en ce qui concerne la puissance, avec les structures classiques (refroidissement direct des barreaux par circulation de réfrigérant, emploi de diélectriques ayant une conductibilité thermique élevée, amélioration de la focalisation des tubes O).

En outre, l'expérience a montré que des tubes amplificateurs réalisés avec précision pouvaient être mis en parallèle de façon satisfaisante en prenant certaines précautions au niveau du couplage. Il n'y a donc plus de limite technique à l'augmentation de la puissance en hyperfréquence, mais seulement une limite économique; il s'agit plutôt de rechercher en fonction de la fréquence et de la puissance requise quelle disposition rend minimaux le poids et la complexité du système. C'est par une étude technologique particulière, tenant compte du système de focalisation magnétique, qu'on peut déterminer dans quels cas l'emploi de structures multiples présente un intérêt. Il paraît en être ainsi pour les tubes de très haute puissance crête O et M et plus particulièrement pour les TPOM du type coaxial. Le TPOM coaxial utilisant une structure cylindrique, le problème des modes se trouve simplifié par rapport aux lignes planes utilisées dans les TPOM classiques.

Par ailleurs, la technique de photogravure permet de réaliser avec une haute précision des circuits à retard sur un support isolant. La réduction de largeur du circuit due à la charge diélectrique peut être compensée par l'emploi de plusieurs structures en parallèle. Des lignes planes assez complexes telles que les lignes en méandres multiples peuvent être réalisées sans difficulté par cette technique.

Dans ces différents cas la structure « multipériodique » se réduit en fait à un ensemble de structures unipériodiques couplées plus ou moins fortement.

Différentes possibilités d'emploi de structures véritablement multipériodiques, c'est-à-dire susceptibles de guider des ondes planes de direction variable ont été décrites ([6], [7]). Elles supposent, aux fréquences usuelles, de vastes enceintes à vide et des faisceaux de forme complexe. On peut imaginer que, pour les futures télécommunications spatiales, il sera possible de construire des tubes sans enceinte étanche, en utilisant le vide cosmique. Des structures multipériodiques, rayonnant directement dans l'espace seraient alors concevables.

Remarquons qu'un « phased array radar » constitué d'un réseau bipériodique de TPO classiques, est

déjà, au sens géométrique, une structure tripériodique.

Dans le cas du maser à onde progressive rappelons que pour obtenir un gain élevé il est nécessaire que la vitesse de groupe soit très faible, environ 1/100 de la vitesse de la lumière. Si la vitesse de phase est élevée, ce qui est le cas des lignes en peigne utilisées par de Grasse et coll. [8], la bande d'accord se trouve réduite en raison de la forte dispersion du circuit; par contre, une structure telle que la ligne en méandre dont la vitesse de phase est comparable à la vitesse de groupe, permet d'obtenir une large bande, mais entraîne des pertes d'insertion fortes car l'onde est liée davantage à la structure conductrice. En outre, le volume de rubis où le champ magnétique haute fréquence est notable se trouve réduit. Il serait possible d'accroître la puissance de saturation des masers à onde progressive par l'emploi de structures multipériodiques et en particulier de structures planes photogravées sur le support actif.

D'une façon schématique on peut diviser les structures à onde lente en deux catégories : les cavités couplées et les structures à barreaux.

Les systèmes de cavités couplées ont généralement des bandes passantes réduites mais présentent des avantages technologiques. Un ouvrage récent en présente les propriétés théoriques [9].

On se limitera ici aux structures à barreaux qui présentent de plus grandes difficultés de refroidissement mais qui permettent d'obtenir une bande supérieure et une bonne résistance de couplage au faisceau.

La théorie de ces structures, essentiellement composées de conducteurs cylindriques disposés régulièrement, repose sur la théorie des lignes multifilaires [10]; pour le mode fondamental, une onde transverse électrique et magnétique se propage à la vitesse de l'onde libre le long des barreaux.

Ceci étant admis, deux types de théorie ont été proposés. J. R. Pierce [11] substitue aux barreaux une surface conductrice anisotrope telle que les charges ne peuvent se déplacer que dans une seule direction. Un raccordement de champ donne la relation de dispersion recherchée.

La théorie des lignes à barreaux considère au contraire les barreaux individuellement; elle a été utilisée initialement par R. C. Fletcher [12] pour calculer la dispersion d'une ligne interdigitale. Il a recherché la valeur explicite de l'impédance caractéristique de barreaux rectangulaires. Cette impédance est une fonction $Z(\omega, \varphi)$ de la fréquence angulaire ω et du déphasage φ entre barreaux adjacents. En écrivant les conditions aux limites aux extrémités des barreaux la caractéristique de dispersion peut être obtenue.

A. Leblond et G. Mourier [13] ont appliqué cette théorie à d'autres structures telle que la ligne en méandre, en utilisant les capacités linéiques entre barreaux, ces capacités pouvant être aisément déterminées à l'aide d'un réseau analogique dans les cas pratiques.

En présence d'une discontinuité dans la forme des barreaux, le raccordement entre les deux sections conduit à une expression de la forme

$$Z(\omega, \varphi) = Z'(\omega, \varphi),$$

d'où l'on déduit la relation cherchée entre ω et φ. La puissance active circulant dans la ligne est transmise au niveau de la discontinuité, mais il n'est pas nécessaire de calculer cette puissance directement par le flux du vecteur de Poynting; il suffit d'appliquer la relation

$$P = v_g w$$

où v_g, vitesse de groupe est déduite de la relation de dispersion ci-dessus; w, densité d'énergie localisée, peut également être calculée par la théorie des lignes à barreaux; cette théorie permet donc sous cette forme de calculer les structures comportant un barreau par cellule, ou, dans certains cas de symétrie, avec deux barreaux par cellule.

Dans le cas général on est ramené à l'application directe de la théorie des lignes multifilaires; cependant en utilisant une admittance caractéristique matricielle B. Epsztein et J. Arnaud [14] ont obtenu la caractéristique de dispersion générale de la structure interdigitale multiple.

Cette méthode est développée dans la présente étude en remplaçant les obstacles définissant les périodicités par des sources de courant ou de tension.

On peut ainsi comparer aisément les types de lignes fondamentaux. En particulier, on pourra comparer deux structures complémentaires au sens du théorème de Babinet. On rappellera en annexe la solution rigoureuse relative à des bandes plates périodiques obtenue par P. N. Butcher.

La théorie des lignes à barreaux conduit à une loi d'homothétie différente de l'homothétie rigoureuse (dimension — longueur d'onde) résultant directement des équations de Maxwell. On vérifiera sur les relations qui vont suivre que l'équation de dispersion d'une ligne à barreau reste inchangée si l'on effectue une homothétie dans le plan perpen-

diculaire aux barreaux sans modifier les longueurs des barreaux. Le taux de retard dans la direction perpendiculaire aux barreaux étant inversement proportionnel au pas, est divisé par le facteur d'homothétie; les impédances, et en particulier l'impédance de couplage restent inchangées; il en résulte qu'une structure à barreaux définie pour un certain taux de retard peut aisément être transposée pour un taux de retard et une longueur d'onde quelconque. Ceci reste vrai tant que la vitesse de phase reste faible devant la vitesse de l'onde libre : c dans le vide et $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$ lorsque la structure est supportée par un diélectrique de constante relative ε_r. Si, au contraire, la vitesse de phase est supérieure à la vitesse de l'onde libre, la structure rayonne; c'est une « zone interdite ».

Cette étude des structures multipériodiques à barreaux se situe dans le cadre de la propagation des ondes dans les milieux périodiques traités par L. Brillouin et M. Parodi [19]. En particulier, la construction des surfaces de propagation dans le cas de pas obliques implique la notion de réseau réciproque développée par ces auteurs. Cependant il ne sera pas nécessaire d'aborder cette question dans cet article.

1. GÉNÉRALITÉS.

Les lignes à retard considérées sont constituées de cylindres comportant certaines irrégularités périodiques, coupures, mises à la masse ou interconnexions.

On se propose d'obtenir d'une façon générale la caractéristique de dispersion $\omega = f(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, où ω est la fréquence angulaire et φ_1, φ_2, φ_3, les déphasages fondamentaux par pas et de préciser ensuite différents cas particulièrement intéressants. Nous rappelons tout d'abord le résultat essentiel de la théorie des lignes multifilaires : des ondes transverses électriques-magnétiques se propagent le long des cylindres à la vitesse $\pm c$, c étant la vitesse de la lumière. L'étude de ces modes T. E. M. se ramène à des problèmes électrostatiques et magnétostatiques plans. Ces deux problèmes sont d'ailleurs étroitement liés comme le montre la théorie du potentiel complexe. On montrera comment on peut tenir compte des obstacles en les remplaçant par des sources de courant et de tension; cette méthode est intéressante dans le cas où les barreaux sont uniformes sur toute leur longueur, ce qu'on suppose désormais.

L'expression de la caractéristique de dispersion d'une structure dont les obstacles sont périodiques dans la direction des barreaux et dont les barreaux eux-mêmes sont arrangés suivant une double périodicité sera écrite en suivant cette méthode.

Les structures les plus intéressantes ayant été étudiées expérimentalement sont sans doute la ligne interdigitale multiple et la ligne en méandre multiple. La ligne à « barreaux interrompus » qu'on décrira également, présente surtout un intérêt théorique car elle peut être le dual de la ligne interdigitale multiple et le complémentaire du méandre multiple dans le cas de bandes plates.

Soit un système de conducteurs cylindriques infinis dont les génératrices sont dirigées suivant Ox. Ils sont immergés dans un milieu homogène de constantes scalaires ε, μ. S'il s'agit du vide

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi 9 \cdot 10^9},$$
$$\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$$

dans le système d'unité M. K. S. A.

Parmi les modes susceptibles de se propager on s'intéresse uniquement au mode T. E. M. Les autres modes conduisent, pour des longueurs d'onde grandes devant la distance moyenne des conducteurs, à des vitesses de phase voisines de c. Or on étudie seulement les ondes très liées à la structure, dont les vitesses de phase sont très inférieures à c.

En se limitant donc aux ondes T. E. M. on voit que l'équation d'onde

$$\Delta E + k^2 E = 0$$

$\left(k = \frac{\omega}{c}, \ \omega \text{ fréquence angulaire}\right)$ peut se séparer en deux équations

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = 0$$

indiquant que le Laplacien transversal est nul, ce qui permet de définir un potentiel électrique transversal satisfaisant à $\Delta_T V = 0$, et

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + k^2 E = 0$$

indiquant que la vitesse de l'onde suivant x est égale à $\pm c$. Les calculs qui vont suivre ont pour but d'étudier de façon détaillée chacune de ces deux équations, et la façon dont elles peuvent être combinées pour donner la caractéristique de dispersion.

2. INTRODUCTION DES COEFFICIENTS D'INFLUENCE LINÉIQUES.

On a vu que l'étude d'une propagation T. E. M. se ramène à des problèmes d'électrostatique et de magnétostatique dans le plan Oyz perpendiculaire aux barreaux.

Appelons $Z = z + iy$ la coordonnée complexe d'un point du plan. Une fonction analytique

$$W(Z) = u(Z) + i\,v(Z)$$

est le potentiel complexe si les conditions aux limites sont satisfaites sur les conducteurs, c'est-à-dire si u est constant sur leur contour (*fig.* 1).

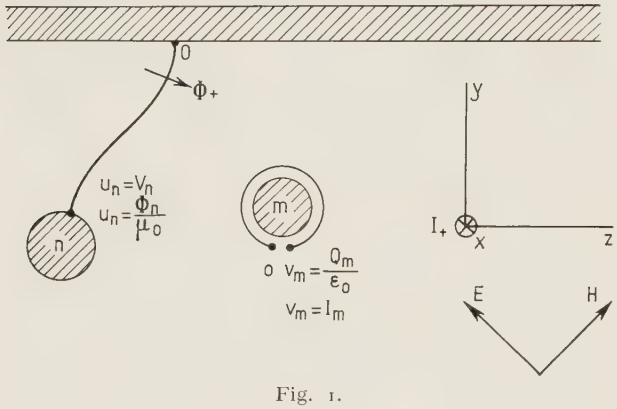


Fig. 1.

Dans le cas du problème électrostatique, u est identifié au potentiel ordinaire et v à la fonction flux.

La variation u_n de u entre la masse et un barreau n est le potentiel de ce barreau.

Appelons v_m la variation de v pour un contour fermé autour du barreau m, parcouru dans le sens rétrograde. v_m est le flux du champ électrique émis par ce conducteur

$$v_m = \frac{Q_m}{\varepsilon_0},$$

Q_m étant la charge électrique du conducteur m. A chaque distribution de potentiel sur les conducteurs correspond une solution $W(Z)$.

Le coefficient d'influence linéique γ_{mn} (qu'on appellera plus brièvement capacité) est la charge prise par le conducteur m lorsque le conducteur n est au potentiel $+1$, les autres conducteurs étant à la masse.

On a donc, par définition, pour une distribution de potentiel :

$$I_l = u_l = \delta_{ln}, \qquad \delta_{ln} = \begin{cases} 1 & \text{si } l = n, \\ 0 & \text{si } l \neq n, \end{cases}$$

un flux

$$v_m = \frac{\gamma_{mn}}{\varepsilon_0}$$

et dans le cas général sous forme matricielle :

$$(1) \qquad (v) = \left(\frac{\gamma}{\varepsilon_0}\right)(u).$$

Rappelons les relations d'électrostatique classique :

$$(2) \qquad \begin{cases} \gamma_{mn} = \gamma_{nm}\,; \\ \sum_m \gamma_{mn} = 0\,; \\ \gamma_{nn} \geq 0\,; \\ \gamma_{nm} \leq 0 \qquad (m \neq n). \end{cases}$$

On a, par conséquent :

$$(3) \qquad \gamma_{nn} = |\,\gamma_{nM}\,| + \sum_{m \neq n} |\,\gamma_{nm}\,|,$$

γ_{nM} étant la capacité du barreau n par rapport à la masse.

3. INTRODUCTION DES INDUCTANCES MUTUELLES LINÉIQUES.

Considérons le système de conducteurs précédent parcouru maintenant par des courants I_m. Soit $W(Z)$ une fonction analytique telle que $u(Z)$ soit constant sur les conducteurs : les solutions sont identiques aux solutions précédentes.

La variation de v autour du conducteur m est prise ici égale au courant I_m circulant dans ce conducteur. u_n représente alors le flux Φ_n du champ magnétique passant entre la masse et le conducteur n, divisé par μ_0 (*fig.* 1).

Si la distribution de courant est

$$I_l = v_l = \delta_{ln},$$

on aura, par définition :

$$u_m = \frac{\lambda_{nm}}{\mu_0}.$$

Rappelons la loi de réciprocité :

$$(4) \qquad \lambda_{nm} = \lambda_{mn},$$

les λ_{nm} sont tous positifs.

Considérons l'ensemble des solutions $W(Z)$ pour un système donné de conducteurs; on a vu, en appliquant le principe de superposition que, en notation matricielle :

$$(5) \qquad (v) = \left(\frac{\gamma}{\varepsilon_0}\right)(u)$$

ou en revenant aux grandeurs électriques

$$\left(\frac{Q}{\varepsilon_0}\right) = \left(\frac{\gamma}{\varepsilon_0}\right)(V) \tag{6}$$

et, d'autre part,

$$(u) = \left(\frac{\lambda}{\mu_0}\right)(v). \tag{7}$$

ou, pour les grandeurs électriques,

$$\left(\frac{\Phi}{\mu_0}\right) = \left(\frac{\lambda}{\mu_0}\right)(I). \tag{8}$$

Les relations (5) et (7) donnent une relation entre les λ et les γ qu'on peut écrire :

$$\left(\frac{\gamma}{\varepsilon_0}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu_0}\right) = (1), \tag{9}$$

(1) étant la matrice unité.

Dans le cas où les barreaux sont identiques et disposés périodiquement, γ_{nm} et λ_{nm} ne dépendent que de la différence $m - n$ des deux indices. On peut alors utiliser un seul indice et la relation (9) s'écrit

$$\begin{cases} \sum_n \lambda_n \gamma_n = \varepsilon_0 \mu_0, \\ \sum_n \lambda_{n+p} \gamma_n = 0 \qquad \text{si} \quad p \neq 0. \end{cases} \tag{10}$$

Donnons quelques précisions sur la valeur des capacités γ_n et des inductances λ_n dans le cas de barreaux périodiques.

En l'absence de plafond, c'est-à-dire de plan conducteur parallèle à la ligne, on voit facilement que les γ_n varient en n^{-2} si n est supérieur à quelques unités. En particulier, dans le cas de bandes plates de largeur égale à l'intervalle, on a (chapitre 8)

$$-\frac{\gamma_n}{\varepsilon_0} = \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}} \sim \frac{1}{n^2} \qquad \text{si} \quad n \geqslant 1. \tag{11}$$

Cette loi en n^{-2} se transforme en une loi exponentielle décroissante $\exp\left(-\pi \frac{np}{D}\right)$, en présence de plafonds à une distance D de la ligne. On peut le voir en considérant la situation où un barreau est porté au potentiel $+1$, les autres étant à la masse. Ces derniers peuvent être remplacés par un plan conducteur. Le barreau porté à $+1$, avec son image électrique dans ce plan conducteur peut être remplacé par un dipôle; il crée un champ normal variant en r^{-2} à une distance r. La charge γ_n induite sur le barreau n varie donc en $(np)^{-2} \times p \sim n^{-2}$.

En présence de plafonds, le champ de ce dipôle est atténué par la présence des plaques parallèles suivant une loi exponentielle.

En l'absence de plafond, les λ_n sont tous infinis. Mais, par contre, les différences

$$\Lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n+1}$$

sont bien définies. Elles représentent le flux magnétique passant entre deux barreaux adjacents lorsqu'un courant unité passe dans le barreau origine. Les Λ_n varient, comme le champ magnétique créé par le courant, en n^{-1}.

Dans le cas d'une succession quelconque de barreaux on a intérêt à repérer les barreaux, soit par des indices impairs, soit par des indices pairs.

Avec la première notation (barreaux impairs) on peut définir une inductance modifiée :

$$\Lambda_{2m\,2n-1} = \lambda_{2m-1\,2n-1} - \lambda_{2m+1\,2n-1}. \tag{12}$$

D'où l'on déduit :

$$\lambda_{2m\ 1\,2n\ -1} = \sum_{l=m}^{\infty} \Lambda_{2l\,2n\ -1}.$$

Avec la deuxième notation (barreaux pairs) on peut définir une capacité modifiée :

$$\Gamma_{2m\,2n\ -1} = \sum_{l=n}^{\infty} \gamma_{2m\ 2l} \tag{13}$$

ou

$$\gamma_{2m\,2n} = \Gamma_{2m\,2n-1} - \Gamma_{2m\,2n+1}.$$

Pour une structure périodique Γ_n varie comme Λ_n en n^{-1}, en l'absence de plafond.

4. CAS D'UNE ONDE PROGRESSIVE.

On a vu que les coefficients γ relient la charge (ou le flux électrique) au potentiel et que les coefficients λ relient le flux magnétique au courant.

En régime alternatif, le courant est relié à la charge Q par la loi de conservation du courant

$$\frac{\partial I_n}{\partial x} = -\frac{\partial Q_n}{\partial t},$$

ce qui s'écrit, puisque I varie en $e^{\pm jkx}$,

$$I_n = \mp jc\, Q_n. \tag{14}$$

La loi de l'induction donne une relation analogue entre V et ϕ

$$\frac{\partial V_n}{\partial x} = -\frac{\partial \phi_n}{\partial t},$$

ce qui s'écrit, V variant en $e^{\mp jkx}$

$$V_n = \mp c\Phi_n. \tag{15}$$

On peut noter ici la dualité existant entre la tension et le courant. Cette dualité signifie qu'on ne modifie pas les équations en permutant à la fois V et I, λ et γ.

5. SOURCES ÉQUIVALENTES AUX OBSTACLES.

Considérons à nouveau le système de conducteurs cylindriques infinis et supposons qu'on injecte en une cote x_i sur le barreau n un courant I_{ni} (*fig.* 2 *a*). Par raison de symétrie le courant injecté vers les x croissants sera $\frac{I_{ni}}{2}$ et vers les x décroissants $-\frac{I_{ni}}{2}$, les courants étant comptés positivement suivant les x croissants (*fig.* 2 *e*). Il en

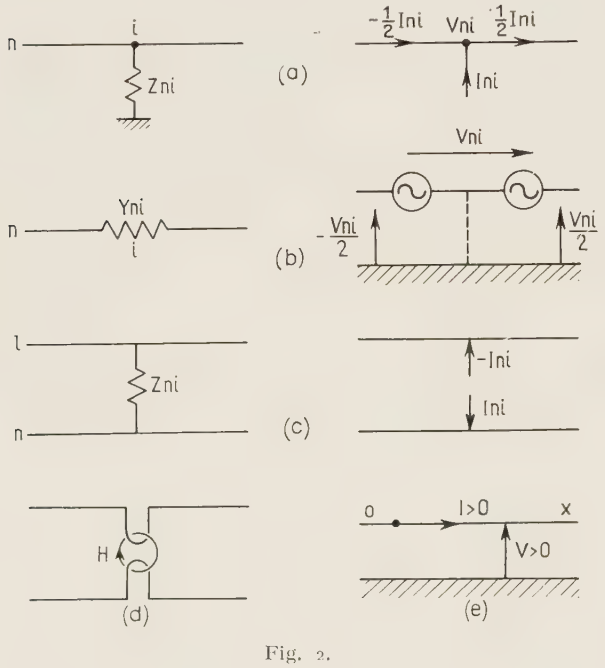


Fig. 2.

résulte sur le barreau m d'après les équations (8) et (15), une tension

$$V_m(x_i) = c\lambda_{mn}\frac{I_{ni}}{2}. \tag{16}$$

Pour une cote quelconque x, on aura

$$V_m(x) = V_m(x_i)\,F(x, x_i);$$

$$F(x, x_i) = \begin{cases} e^{-jk(x-x_i)} & \text{si } x \geqq x_i, \\ e^{jk(x-x_i)} & \text{si } x \leqq x_i. \end{cases}$$

Le courant est nul partout sauf sur le barreau n ; il s'écrit

$$I_m(x) = \delta_{mn}\frac{I_{ni}}{2}\,G(x, x_i), \tag{17}$$

avec

$$\delta_{mn} = 1 \quad \text{si } m = n,$$
$$= 0 \quad \text{si } m \neq n;$$

$$G = \begin{cases} e^{-jk(x-x_i)} & \text{si } x > x_i \\ -e^{jk(x-x_i)} & \text{si } x < x_i; \end{cases}$$

G présentant pour $x = x_i$ une discontinuité correspondant au courant injecté.

Supposons maintenant qu'on insère une tension V_{ni} en x_i dans le barreau n (*fig.* 2 *b*). Les courants et tensions dus à cette source s'écrivent, d'après (6) et (14),

$$I_m(x) = c\gamma_{mn}\frac{V_{ni}}{2}F(x, x_i),$$

$$V_m(x) = \delta_{mn}\frac{V_{ni}}{2}G(x, x_i).$$

Dans le cas général on pourra superposer un nombre quelconque de sources de tension et de courant, et écrire les conditions fixées par les obstacles.

Ainsi s'il y a une impédance Z_{ni} entre le point i du barreau n et la masse (*fig.* 2 *a*), on doit écrire

$$Z_{ni} = -\frac{V_n(x_i)}{I_{ni}},$$

$V_n(x_i)$ étant la tension due à l'ensemble des sources. Si une admittance Y_{ni} est insérée dans le barreau n en i, on a (*fig.* 2 *b*)

$$Y_{ni} = -\frac{I_n(x_i)}{V_{ni}}.$$

Dans le cas d'une connexion d'impédance Z_{ni} entre le barreau n et le barreau l pour une même cote x_i la situation est un peu plus complexe (*fig.* 2 *c*).

Le courant injecté sur n étant I_{ni} le courant injecté sur l sera $-I_{ni}$. Le potentiel dû à cette double source sera donc

$$V_m(x) = c(\lambda_{mn} - \lambda_{ml})\frac{I_{ni}}{2}F(x, x_i)$$

et le courant

$$I_m(x) = (\delta_{mn} - \delta_{ml})\frac{I_{ni}}{2}G(x, x_i),$$

la loi d'Ohm s'écrivant ici

$$Z_{ni} = -\frac{V_n(x_i) - V_l(x_i)}{I_{ni}}.$$

Le dual de la connection qui vient d'être envisagée serait un transformateur parfait de rapport 1

dont la réactance serait proportionnelle à la suceptance de la connexion (*fig.* 2 *d*).

Dans le paragraphe suivant on vérifiera comment le principe de Babinet s'applique aux équations ci-dessus. Puis, le cas des structures triplement périodiques sera abordé.

6. APPLICATION DU PRINCIPE DE BABINET. STRUCTURES EN BANDES.

Considérons deux structures I et II planes, infiniment minces, et parfaitement conductrices. On dit qu'elles sont complémentaires si leur superposition permet de reconstituer le plan entier.

Supposons que E^{I}, $\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H^{I}$ soit une solution des équations de Maxwell pour la structure I, alors

$$E^{II} = \pm \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H^{I},$$
$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H^{II} = \mp E^{I}$$

est une solution pour la structure II, car elle satisfait aux équations de Maxwell et aux conditions aux limites à condition d'utiliser le signe supérieur au-dessous de la structure ($y < 0$) et le signe inférieur au-dessus ($y > 0$). C'est le principe bien connu de Babinet.

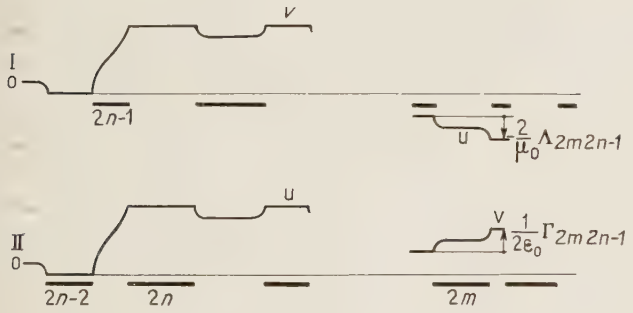


Fig. 3.

On va chercher comment s'écrit ce principe dans le cadre de la théorie des lignes multifilaires, afin d'en faire l'application aux structures périodiques.

Revenons au problème plan avec des bandes infiniment minces repérées par des indices impairs pour la structure I et pairs pour la structure II (et inversement pour les espaces entre bandes) (*fig.* 3).

Supposons que $u^{I} + iv^{I}$ soit une solution pour I, alors on vérifie aisément que

$$(18) \qquad \begin{cases} u^{II} = \pm v^{I}, \\ v^{II} = \mp u^{I} \end{cases}$$

est une solution pour la structure II, si l'on adopte, par exemple, le signe supérieur pour $y > 0$ et le signe inférieur pour $y < 0$.

Considérons un trajet au-dessus de la structure comme l'indique la figure 3.

Si la distribution de potentiel sur la structure II est

$$u_{2l} = 1 \quad \text{si} \quad l > n,$$
$$= 0 \quad \text{si} \quad l < n,$$

la variation de v le long de la bande $2m$ sera par définition [éq. (13)]

$$\frac{1}{2\varepsilon_0}\Gamma_{2m\,2n-1}.$$

Pour la structure I, la bande $2n-1$ est parcourue par un courant égal à $2(U^{II} = V^{I})$. Par définition [éq. (12)], la variation de U entre les bandes $2m-1$ et $2m+1$ est égale à $-\frac{2}{\mu_0}\Lambda_{2m\,2n-1}$. Comme $V^{II} = -U^{II}$, on en déduit

$$(19) \qquad \frac{2}{\mu_0}\Lambda^{I}_{2m\,2n-1} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\Gamma^{II}_{2m\,2n-1}.$$

Si l'on revient aux capacités et inductances habituelles, on a

$$\frac{4\varepsilon_0}{\mu_0}(\lambda^{I}_{2m-1\,2n-1} - \lambda^{I}_{2m+1\,2n-1}) = \sum_{l=n}^{\infty} \gamma^{II}_{2m\,2l}$$

ou

$$(20) \qquad \gamma^{II}_{2m\,2n} = \frac{4\varepsilon_0}{\mu_0}(\lambda^{I}_{2m-1\,2n-1} + \lambda^{I}_{2m+1\,2n+1} - \lambda^{I}_{2m+1\,2n-1} - \lambda^{I}_{2m-1\,2n+1}).$$

On va utiliser la relation (20) pour montrer que deux structures complémentaires ont la même caractéristique. Les courants de l'une sont proportionnels aux tensions de l'autre et réciproquement; dans le cas de structures périodiques, les courbes de dispersion sont identiques.

La structure étant infiniment plate, il n'y a lieu de considérer que les admittances Y insérées dans les barreaux et les impédances Z reliant deux barreaux adjacents.

Supposons que la structure I ait une connexion d'impédance $Z_{2n\,i}$ entre les barreaux $2n-1$ et $2n+1$ en i. Appelons $I_{2n\,i}$ le courant allant de $2n-1$ à $2n+1$ à travers $Z_{2n\,i}$. La différence de

tension entre les barreaux $2m+1$ et $2m-1$ en j due à cette source s'écrit

$$V_{2m+1\,j} - V_{2m-1\,j} = c\,(\lambda^{I}_{2m\;1\;2n-1} - \lambda^{I}_{2m-1\;2n+1} - \lambda^{I}_{2m+1\;2n-1} + \lambda^{I}_{2m-1\;2n-1})\,\frac{I_{2nt}}{2}\,F(x_j, x_i).$$

Pour simplifier l'écriture, limitons-nous au cas où la structure I ne comporte que des connexions de

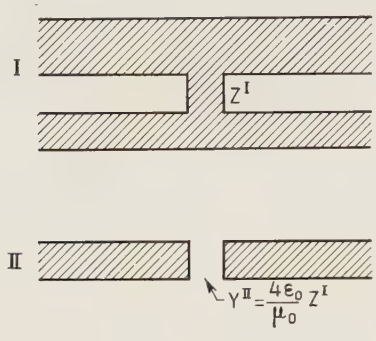


Fig. 4.

ce type. La solution peut s'écrire sous la forme du système d'équations homogènes suivant :

$$(21)\qquad \sum_{n,i} c\,(\lambda^{I}_{2m+1\;2n+1} - \lambda^{I}_{2m-1\;2n+1} - \lambda^{I}_{2m+1\;2n-1} + \lambda^{I}_{2m-1\;2n-1})\,\frac{I_{2n\,i}}{2}\,F(x_j, x_i) = -Z_{2m\,j}I_{2m\,j}.$$

Considérons maintenant la structure II, complémentaire de I. A la place de la connexion $Z_{2n\,i}$, on a l'admittance complémentaire (*fig.* 4)

$$Y_{2n\,i} = \frac{4\varepsilon_0}{\mu_0}\,Z_{2n\,i}.$$

Il lui correspond une source de tension $V_{2n\,i}$ qui crée en $2m\,j$ un courant

$$I_{2m\,j} = c\,\gamma^{II}_{2m\;2n}\,\frac{V_{2n\,i}}{2}\,F(x_j, x_i).$$

La solution s'écrit, dans ce cas,

$$(22)\qquad \sum_{n,i} c\,\gamma^{II}_{2m\;2n}\,\frac{V_{2n\,i}}{2}\,F(x_j, x_i) = -V_{2m\,j}V_{2m\,j}$$

On voit en tenant compte de la relation (20) entre γ^{II} et λ^{I} que ces deux expressions sont équivalentes à condition de permuter I et V. Le principe de Babinet peut être considéré comme un cas particulier du principe de dualité dont il a été question au paragraphe 5.

7. CAS D'OBSTACLES DISTRIBUÉS PÉRIODIQUEMENT LE LONG DES BARREAUX.

Dans ce cas, grâce au théorème de Floquet, on peut considérer des solutions en « ondes progressives » et substituer aux obstacles réels des sources..., $I\,e^{+j\varphi_3}$, I, $I\,e^{-j\varphi_3}$... placées périodiquement en ..., $x_i - p_3$, x_i, $x_i + p_3$, ... Ces courants constituent une série géométrique et l'on peut calculer la somme de leurs effets à une cote x.

La fonction $F(x)$ du paragraphe 5 s'écrit maintenant

$$F(x) = \begin{cases} e^{-jkx} + e^{jkx}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-jn(\varphi_3+kp_3)} + e^{-jkx}\sum_{n=1}^{\infty} e^{jn(\varphi_3-kp_3)} \\ \qquad (0 \leq x \leq p_3), \\ e^{jkx} + e^{jkx}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-jn(\varphi_3+kp_3)} + e^{-jkx}\sum_{n=1}^{\infty} e^{jn(\varphi_3-kp_3)} \\ \qquad (-p_3 \leq x \leq 0), \end{cases}$$

ou, en posant

$$X = e^{-jkx}, \qquad P = e^{-jkp_3}, \qquad \Phi = e^{-j\varphi_3};$$

$$F(x) \begin{cases} \dfrac{X}{1-\dfrac{P}{\Phi}} + \dfrac{1}{X}\,\dfrac{1}{\dfrac{1}{P\Phi}-1} & (0 \leq x \leq p_3), \\ \dfrac{X}{\dfrac{\Phi}{P}-1} + \dfrac{1}{X}\,\dfrac{1}{1-P\Phi} & (-p_3 \leq x \leq 0). \end{cases}$$

Une quantité qui s'introduira dans le calcul des structures comportant deux obstacles par cellule est

$$(23)\qquad \frac{F(d)F(-d)}{F(0)F(0)} = \frac{\{1+\cos\varphi_3[\cos(2kd-kp_3)-\cos kp_3]\}}{\{-\cos kp_3\cos(2kd-kp_3)\}} \Big/ \sin^2 kp_3$$

qui peut s'écrire aussi, en posant $d = d_1$ et $p_3 - d = d_2$,

$$\frac{2\cos\varphi_3 + \left(\dfrac{\sin kd_1}{\sin kd_2} + \dfrac{\sin kd_2}{\sin kd_1}\right)}{\sin k(d_1+d_2)\,(\operatorname{cotg} kd_1 + \operatorname{cotg} kd_2)}.$$

Si l'on fait maintenant $d_1 = d_2 = d$, le terme de droite de (23) devient

$$\frac{1+\cos\varphi_3}{1+\cos 2kd} = \left(\frac{\cos\dfrac{\varphi_3}{2}}{\cos kd}\right)^2.$$

D'une façon analogue, on peut obtenir le courant total. La fonction $G(x)$ définie au paragraphe 5 devient

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma}{\dfrac{P}{1-\Phi}} - \dfrac{1}{X}\dfrac{1}{\dfrac{1}{P\Phi}-1} & (0 < x < p_3), \\ \dfrac{\Gamma}{\dfrac{\Phi}{P}-1} - \dfrac{1}{X}\dfrac{1}{1-P\Phi} & (-p_3 < x < 0). \end{cases}$$

8. DISPOSITION PÉRIODIQUE DES BARREAUX. CAS DE SYMÉTRIE.

On suppose que l'ensemble des barreaux peut être obtenu par la translation suivant deux vecteurs $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_2$ d'un certain nombre N de barreaux (*fig.* 5). On peut définir une cellule origine contenant ces barreaux. La position d'une autre cellule est donnée par rapport à un point de référence de la cellule origine par

$$l\mathbf{p}_1 + m\mathbf{p}_2,$$

l et m étant maintenant des entiers permettant de repérer la cellule. Notons qu'il peut y avoir plusieurs manières de définir la cellule origine ainsi que $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_2$. Lorsque cela sera possible on choisira $\mathbf{p}_2$ perpendiculaire à $\mathbf{p}_1$ pour faciliter le tracé de la caractéristique de dispersion.

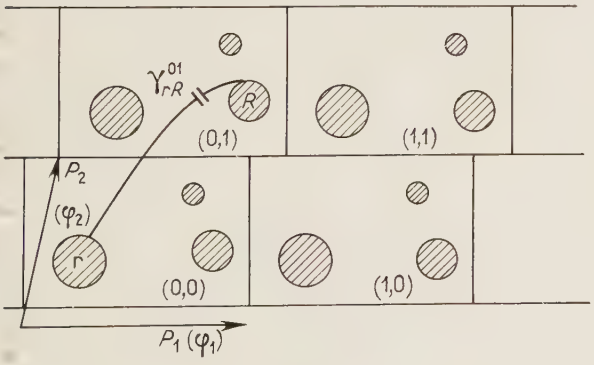


Fig. 5.

Considérons une solution d'onde plane définie par des déphasages élémentaires φ_1 et φ_2 suivant $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_2$. Le potentiel du barreau R de la cellule l, m sera, d'après le théorème de Floquet,

$$V_R^{lm} = V_R^{00}\, e^{-j(l\varphi_1 + m\varphi_2)}.$$

Cela conduit à définir des admittances caractéristiques, fonctions de φ_1 et φ_2, par

$$(24) \qquad Y_{rR} = c \sum_{l,m=-\infty}^{+\infty} \gamma_{rR}^{lm}\, e^{-j(l\varphi_1 + m\varphi_2)},$$

où γ_{rR}^{lm} est la capacité linéique entre le barreau R de la cellule l, m et le barreau r de la cellule origine.

D'après (2), on voit que $Y_{rR} = Y_{\check{R}r}$ Y_{rr} est donc réel. Ce résultat reste valable dans le cas d'un milieu gyroélectrique sans pertes ($\gamma_{nm} = \gamma_{mn}^*$).

On peut de même définir des impédances caractéristiques par

$$(25) \qquad Z_{rR} = c \sum_{l,m=-\infty}^{+\infty} \lambda_{rR}^{lm}\, e^{-j(l\varphi_1 + m\varphi_2)}.$$

Remarquons que, en notation matricielle,

$$(26) \qquad (Z)\,(Y) = (1).$$

Ceci résulte directement de la relation (9) entre (γ) et (λ). On peut montrer [18] que les équations classiques des lignes sont applicables en utilisant les matrices (Y) et (Z).

Il suffit maintenant de remplacer, dans les équations du paragraphe 5, $c\gamma$ par $Y(\varphi_1, \varphi_2)$ et $c\lambda$ par $Z(\varphi_1, \varphi_2)$ pour obtenir la caractéristique d'un système périodique.

Une difficulté se présente cependant pour la ligne interconnectée, car les interconnexions peuvent être faites entre barreaux de cellules différentes; c'est en fait le cas le plus intéressant. Il faudra le considérer en particulier.

Mais auparavant étudions comment on peut ramener l'admittance d'une cellule comportant deux barreaux identiques à l'admittance définie pour un barreau par cellule.

Conditions de symétrie. — Considérons le cas de deux barreaux par cellule, représenté sur la figure 6, Il est possible en raison de la symétrie de choisir une cellule élémentaire ne contenant qu'un seul barreau. On a cependant intérêt à utiliser la cellule double si les obstacles, non représentés sur la figure 6, font jouer un rôle différent aux deux barreaux. Les admittances générales Y_{rR} une fois introduites doivent être ramenées aux admittances plus simples qu'on peut écrire dans le cas où il n'y a qu'un seul type de barreau.

Dans ce dernier cas, on notera les capacités γ^{mn} comme l'indique la figure, et l'admittance caractéristique s'écrit

$$Y(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{mn} \gamma^{mn}\, e^{-j\left(m\frac{\varphi_1}{2} + n\frac{\varphi_2}{2}\right)}.$$

En combinant les capacités, on peut montrer que

$$\sqrt{\frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{11}Y_{22}}} = -\frac{Y_{12}e^{-i\frac{\varphi}{2}}}{Y\left(\frac{\varphi_1}{2}-\pi,\varphi_2\right)-Y\left(\frac{\varphi_1}{2},\varphi_2\right)} \Big/ \frac{Y\left(\frac{\varphi_1}{2}-\pi,\varphi_2\right)+Y\left(\frac{\varphi_1}{2},\varphi_2\right)}{Y\left(\frac{\varphi_1}{2}-\pi,\varphi_2\right)-Y\left(\frac{\varphi_1}{2},\varphi_2\right)}.$$

Donnons explicitement le développement des admittances en fonction des capacités dans différents cas.

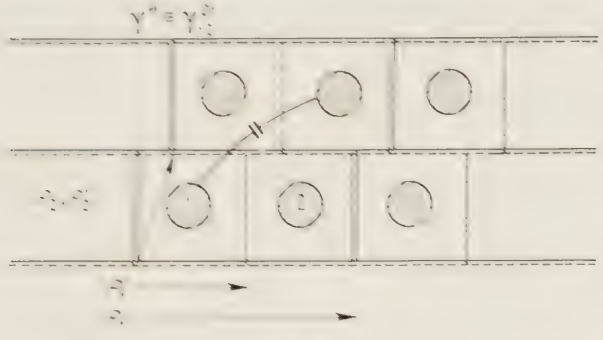


Fig. 6.

Cas d'un barreau par cellule. Système unipériodique. — (29) s'écrit simplement

$$Y^{I} = Y^{II} = \frac{1}{c}\left(\gamma_{11}+\gamma_{12}+\gamma_{12}e^{-i\varphi}+\gamma_{12}e^{+i\varphi}+\dots\right),$$

ou, d'après l'équation (3),

$$Y^{I} = Y^{II} = \frac{1}{c}\left(\gamma_{11}+2\gamma_{12}+2\gamma_{12}\cos\varphi+\dots\right),$$

γ_{11} étant la capacité barreau-masse.

Dans le cas de bandes plates de largeur T une relation relative aux admittances de deux structures complémentaires I et II peut être déduite immédiatement du principe de Babinet. En effet, (30) s'écrit

$$Y^{I}-\frac{1}{c}\gamma_{11} = \frac{1}{c}\gamma_{12}\left(1+e^{-i\varphi}+e^{+i\varphi}+\dots\right).$$

D'où, en utilisant le développement définissant Y^{II} et $Z^{I}=\frac{1}{Y^{I}}$,

$$Y^{I}\left(Y^{I}-\frac{1}{c}\gamma_{11}\right) = \frac{\frac{1}{c}\gamma_{12}\sin^2\frac{\varphi}{2}}{Y^{II}} = 1.$$

La valeur de A est donnée en annexe.

Si $T=\frac{P}{2}$, on a simplement $A=1$ et

$$Y^{I}=Y^{II}=4\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|. \qquad (29')$$

Cas d'un barreau par cellule. Système bipériodique. — Si le réseau bipériodique $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ est carré (*fig. 7 a*) on obtient le développement suivant :

$$\frac{1}{c}Y(\varphi_1,\varphi_2) = \left(\gamma_{11}+\frac{1}{2}\gamma_{12}\right)\sin^2\frac{\varphi_1}{2}+\frac{1}{2}\gamma_{12}\sin^2\frac{\varphi_2}{2}+\dots.$$

Cas de deux barreaux par cellule. Système unipériodique. — On suppose que les capacités entre

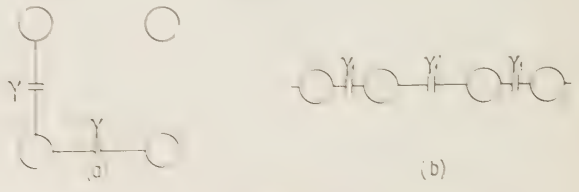


Fig. 7.

doigts adjacents sont alternativement γ_1 et γ'_1 (*fig. 7 b*)

$$\frac{1}{c}Y_{11} = \gamma_{11}+\gamma_1+\gamma'_1,$$

$$\frac{1}{c}Y_{12} = \gamma_{12}+\gamma_1 e^{-i\varphi}+\gamma'_1 e^{+i\varphi}.$$

γ_{11} et γ_{12} étant les capacités par rapport à la masse des barreaux 1 et 2

$$\frac{1}{c}Y_{11} = \gamma_{11}+2\gamma_1,$$

$$\frac{1}{c}Y_{12} = \gamma_{12}+\gamma_1 e^{-i\varphi}+\gamma'_1 e^{+i\varphi}$$

et, pour $\gamma_{11}=\gamma_{12}=0$,

$$\frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{11}Y_{22}} = \frac{\gamma_1^2+\gamma_1'^2+2\gamma_1\gamma'_1\cos\varphi}{(\gamma_1+\gamma'_1)^2} \qquad (31)$$

ou, en ne conservant que $\gamma_1=\gamma'_1$,

$$\frac{1}{c}Y_{11}=\frac{1}{c}Y_{22}=-2\gamma_1,$$

$$\frac{1}{c}Y_{12}=\gamma_1(1+e^{i\varphi}),$$

$$\frac{1}{c}Y_{21}=\gamma_1(1+e^{-i\varphi})$$

et

$$\frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{11}Y_{22}}=\cos^2\frac{\varphi}{2}. \qquad (32)$$

les éléments de $(Z) = (Y)^{-1}$ s'écrivent

$$Z_{22} = Z_{11} = \frac{Y_{22}}{\Delta},$$

$$Z_{12} = -\frac{Y_{12}}{\Delta}, \qquad Z_{21} = -\frac{Y_{21}}{\Delta},$$

avec

$$\Delta = Y_{11} Y_{22} - Y_{12} Y_{21}.$$

Si l'on néglige toutes les capacités autres que les capacités barreau masse, on a

$$Z_{11} = Z_{22} = \frac{1}{c\,|\gamma_M|},$$

$$Z_{12} = Z_{21} = 0.$$

Dans le cas de bandes plates périodiques, de largeurs égales à la moitié du demi-pas, on obtient en recomposant les capacités données en (11)

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\, Y_{11} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\, Y_{22} = 2\left(\sin\frac{\varphi}{4} + \cos\frac{\varphi}{4}\right),$$

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\, Y_{12}\, e^{-j\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\, Y_{21}\, e^{j\frac{\varphi}{2}} = 2\left(\sin\frac{\varphi}{4} - \cos\frac{\varphi}{4}\right).$$

Dans le cas de bandes plates quelconques, l'examen de la figure 8 montre que (20) s'écrit

$$\frac{\mu_0}{4\varepsilon_0}\gamma'_{11} = \lambda'_{12} + \lambda'_{21} - \lambda'_{11} - \lambda'_{22},$$

$$\frac{\mu_0}{4\varepsilon_0}\gamma'_{12} = \lambda'^{-1}_{11} + \lambda'_{22} - \lambda'_{12} - \lambda'^{-1}_{21},$$

$$\frac{\mu_0}{4\varepsilon_0}\gamma'_{21} = \lambda'_{22} + \lambda'^{-1}_{11} - \lambda'_{21} - \lambda'^{-1}_{12},$$

$$\frac{\mu_0}{4\varepsilon_0}\gamma'_{22} = \lambda'^{+1}_{21} + \lambda'^{-1}_{12} - \lambda'_{22} - \lambda'_{11}.$$

Les γ étant relatifs à la structure II et les λ à la structure I complémentaire.

Il en résulte pour les admittances et impédances caractéristiques des structures II et I :

$$(33)\quad \begin{cases} \frac{\mu_0}{4\varepsilon_0} Y_{11} = Z_{12} + Z_{21} - Z_{11} - Z_{22}, \\ \frac{\mu_0}{4\varepsilon_0} Y_{12} = Z_{11}\, e^{j\varphi} + Z_{22} - Z_{12} - Z_{21}\, e^{j\varphi}, \\ \frac{\mu_0}{4\varepsilon_0} Y_{21} = Z_{22} + Z_{11}\, e^{-j\varphi} - Z_{21} - Z_{12}\, e^{-j\varphi}, \\ \frac{\mu_0}{4\varepsilon_0} Y_{22} = Z_{21}\, e^{j\varphi} + Z_{12}\, e^{-j\varphi} - Z_{22} - Z_{11}. \end{cases}$$

Ces relations permettront de comparer la structure en méandres multiples à la structure en bandes interrompues.

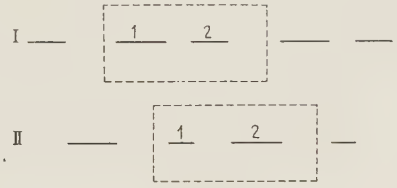


Fig. 8.

9. STRUCTURES TRIPÉRIODIQUES QUELCONQUES.

1. Calcul de l'obstacle (*fig.* 9).

Considérons un des obstacles localisé dans un plan $x = x_i$. En supposant les barreaux interrompus dans ce plan, un obstacle quelconque pourra être représenté par des susceptances connectées entre les extrémités des barreaux. Appelons B_{rR}^{lm-} la susceptance connectée entre le barreau r de la cellule origine à gauche de la coupure et le barreau R de la cellule (l, m) également à gauche de la coupure. B_{rM}^{-} sera la susceptance connectée entre le barreau r et la masse. On définit de façon similaire à droite de la coupure B_{rR}^{lm+} et B_{rM}^{-}. Appelons B_{rR}^{lm0} la

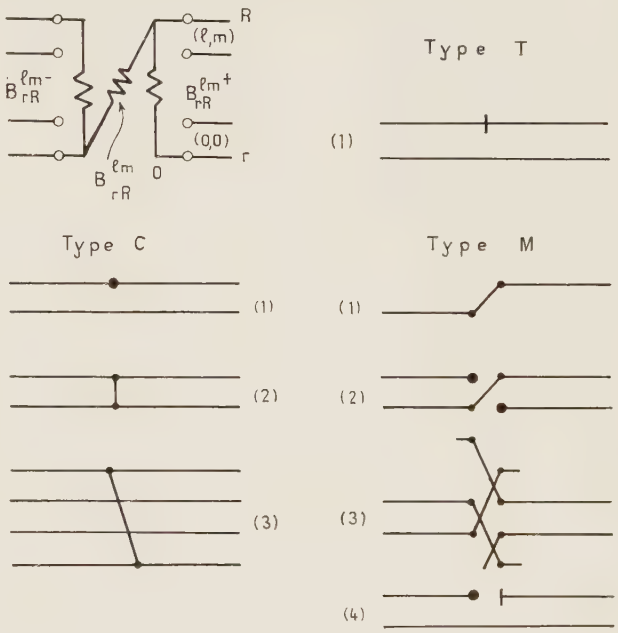


Fig. 9. — Obstacles réactifs; schéma général et différents types : T (tension), C (courant) et M (mixte). Un point sans connexion représente une mise à la masse; un trait perpendiculaire au barreau représente une coupure.

susceptance connectée entre le barreau r de la cellule origine à gauche de la coupure et le barreau R de la cellule (l, m) à droite. Ces dernières susceptances assurent un couplage entre les deux sections multifilaires.

Appelons V^- et V^+ l'ensemble des tensions à gauche et à droite de l'obstacle, et I^- et I^+ les courants. En utilisant le théorème de Floquet comme on l'a fait au paragraphe précédent, on obtient la caractéristique de l'obstacle sous la forme

$$\begin{pmatrix} I^- \\ I^+ \end{pmatrix} = j \begin{pmatrix} B^-_{rR} & B^0_{rR} \\ B^{0\,*}_{Rr} & B^+_{rR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^- \\ V^+ \end{pmatrix}.$$

avec les définitions suivantes

$$B^0_{rR}(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{l,m} B^{lm\,0}_{rR}\, e^{-j(l\varphi_1 + m\varphi_2)};$$

$$B^{\pm}_{rR}(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{l,m} B^{lm\,\pm}_{rR}\, e^{-j(l\varphi_1 + m\varphi_2)}; \quad r \neq R.$$

$$B^-_{rr}(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{l,m} B^{lm\,-}_{rr}\, e^{-j(l\varphi_1 + m\varphi_2)} - \sum_R B^-_{rR}(0, 0) - B^-_{rM} - \sum_R B^0_{rR}(0, 0);$$

$$B^+_{rr}(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{l,m} B^{lm\,+}_{rr}\, e^{-j(l\varphi_1 + m\varphi_2)} - \sum_R B^+_{rR}(0,0) - B^+_{rM} - \sum_R B^0_{Rr}(0,0).$$

2. Calcul des sources.

Considérons maintenant le système multifilaire; chaque obstacle peut être remplacé par deux sources de courant : I^+ et I^-, et une source de tension :

$$\mathcal{V} = V^+ - V^-.$$

Les obstacles étant repérés par les indices i ou j, on peut mettre les valeurs des fonctions F introduites au paragraphe 7 sous forme d'une matrice dont les éléments sont

$$F_{ij} = F(x_j - x_i).$$

La fonction G étant discontinue pour $i = j$, on distinguera la valeur à gauche (G^-) et la valeur à droite (G^+).

Les tensions et courants sont maintenant des matrices rectangles ayant un nombre de lignes égal au nombre de barreaux par cellule, et un nombre de colonnes égal au nombre d'obstacles par cellule.

En écrivant que le courant dans la coupure est nul, on peut éliminer la source de tension $\mathcal{V}$ et obtenir une relation entre V et I :

$$0 = \mathcal{V} F + Z(I^- G^- + I^- G^+);$$

$$2V^- = \mathcal{V} G^- + Z(I^+ + I^-) F;$$

$$2V^+ = \mathcal{V} G^+ + Z(I^+ + I^-) F.$$

D'où

$$2Y(V^- V^+) = (I^- I^+) \left(\begin{array}{c|c} F - G^+ F^{-1} G^- & F - G^+ F^{-1} G^+ \\ \hline F - G^- F^{-1} G & F - G^- F^{-1} G^+ \end{array}\right).$$

Cette équation, jointe aux équations des obstacles, définit la propagation du système. Dans le cas de deux barreaux et deux obstacles, ces équations sont résolues par un déterminant comportant huit lignes et colonnes.

Ce déterminant se simplifie si l'on se limite à des susceptances nulles ou infinies.

Une expression plus simple est également obtenue si les obstacles correspondent uniquement à des sources de courant (type C de la figure 9) ou uniquement à des sources de tension (type T de la figure 9).

Dans ce cas, la matrice de droite se réduit à F.

Les structures présentant un intérêt pratique comportent seulement un ou deux barreaux par cellule et un ou deux obstacles par cellule.

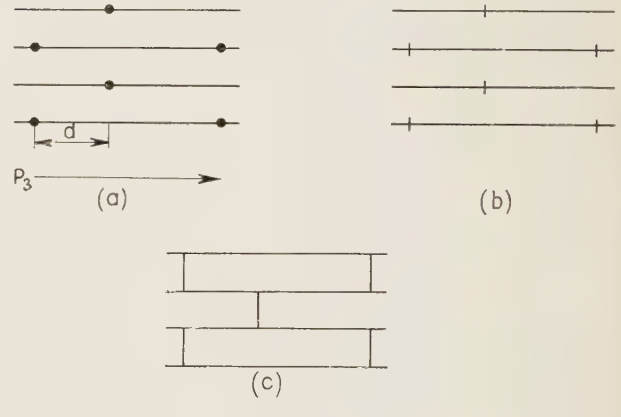


Fig. 10.

Dans les prochains paragraphes, on calculera explicitement la caractéristique de dispersion de trois structures représentées par la figure 10 :

a. Ligne interdigitale multiple : obstacle C_1-C_1;

b. ligne à barreaux interrompus (duale de la ligne précédente : obstacles T_1-T_1);

c. ligne en méandre multiple (ou hélice multiple, en rapprochant les barreaux homologues) : obstacles C_2-C_2.

Une extension simple de la ligne en méandre multiple est la ligne en triple méandre multiple, qui est étudiée au paragraphe 12 : obstacle C_3-C_3.

A propos des obstacles du type mixte M, on peut faire les remarques suivantes :

a. Un obstacle du type M 1 conduit à une hélice *n*-filaire en supposant des conditions aux limites cycliques;

b. Un obstacle du type M 2, peut, dans certaines conditions de symétrie, être équivalent à la ligne interdigitale multiple;

c. Un obstacle du type M 3 conduit à des hélices *n*-filaires croisées;

d. Deux obstacles du type M 4 inversés correspondent à une structure « en crochet ».

Nous n'avons représenté que des structures bipériodiques; une double périodicité dans le plan perpendiculaire aux barreaux n'apporte pas de modification importante; ces structures tripériodiques peuvent être ramenées à un couplage de structures bipériodiques.

10. DISPERSION DE LA LIGNE INTERDIGITALE MULTIPLE.

Cette ligne est représentée de façon schématique figure 11; elle comporte deux barreaux par cellule; l'un d'eux est mis à la masse en x, l'autre en $x + d$.

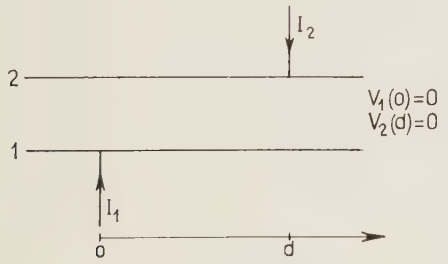


Fig. 11.

En utilisant les équations (16) et (25) on obtient immédiatement

$$\frac{Z_{11}Z_{22}}{Z_{12}Z_{21}} = \frac{F(d)\,F(-d)}{F(0)\,F(0)}. \tag{34}$$

Le deuxième membre est donné par (23).

On voit que le premier membre, pour un système de conducteur donné, ne dépend que de φ_1 et φ_2. Le deuxième membre ne dépend que de φ_3 et de la fréquence $\left(\text{par } k = \frac{\omega}{c}\right)$.

Pour une fréquence fixée on obtient une relation entre φ_1, φ_2 et φ_3 qui est la caractéristique de dispersion recherchée.

On peut simplifier l'expression (23) si l'on suppose que $d = \frac{p_3}{2}$; l'expression (34) devient

$$\cos\frac{\varphi_3}{2} = \cos kd\sqrt{\frac{Y_{11}Y_{22}}{Y_{12}Y_{21}}}. \tag{35}$$

Supposons qu'on néglige toutes les capacités autres que les capacités γ_1 et γ'_1 entre doigts adjacents. (35) s'écrit pour $\varphi_3 = 0$ [éq (31)].

$$\cos kd = \frac{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_1'^2 + 2\gamma_1\gamma'_1\cos\varphi}}{\gamma_1 + \gamma'_1}. \tag{36}$$

ou

$$\sin kd = \pm\sin\frac{\varphi}{2}\,\frac{2\sqrt{\gamma_1\gamma'_1}}{\gamma_1 + \gamma'_1}.$$

Cette dissymétrie ($\gamma_1 \neq \gamma'_1$) provoque l'apparition d'une bande de coupure pour $\varphi = \pi$; il en résulte en pratique une perturbation de fonctionnement des carcinotrons utilisant cette structure si les deux peignes constituant la ligne ne sont pas rigoureusement symétriques.

Supposons maintenant que la ligne soit symétrique; la dispersion s'écrit, en utilisant (28) :

$$\operatorname{tg}^2\frac{kd}{2} = \frac{F\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{F\left(\frac{\varphi}{2} - \pi\right)} = \frac{|\gamma_M| + 4|\gamma_1|\sin^2\frac{\varphi}{2} + \dots}{|\gamma_M| + 4|\gamma_1|\cos^2\frac{\varphi}{2} + \dots} \tag{37}$$

ou, si l'on ne tient compte que de γ_1,

$$\operatorname{tg}\frac{kd}{2} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \tag{38}$$

et, pour la première détermination

$$\varphi = 2kd.$$

Ce résultat simple correspond à l'image d'une onde se déplaçant en zig-zag à la vitesse c entre les doigts de la ligne interdigitale.

La figure 12 représente la caractéristique de dispersion de la ligne interdigitale bipériodique (p_1, p_3) dans le cas où l'on ne tient compte que des capacités entre doigts adjacents et pour $|p_3| = 2d$.

Dans ce cas, l'équation (35) s'écrit simplement :

$$\cos\frac{\varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi_2}{2} = \cos kd. \qquad (39)$$

La ligne à barreaux interrompus conduit aux mêmes conclusions par suite de la dualité courant-tension indiquée au paragraphe 4. La dispersion est donnée par

$$\frac{Y_{11}+Y_{12}}{Y_{11}-Y_{12}} = \frac{F(d)\,F(-d)}{F_0\,F_0}. \qquad (40)$$

Le terme de gauche est identique à celui de l'équation (34), car $(Y) = (Z)^{-1}$ [éq. (26)]. Il en est de même des termes de droite; il y a donc identité des expressions.

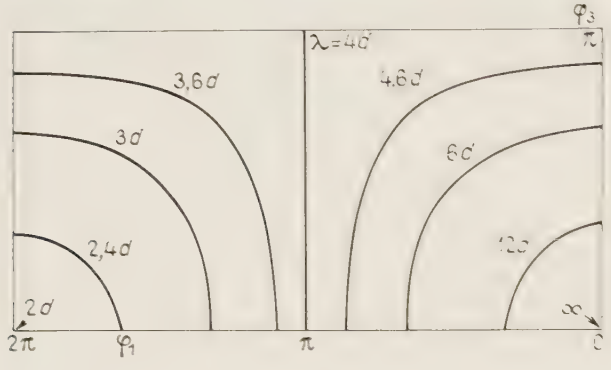


Fig. 12.

Dans le cas où les barreaux sont des bandes infiniment minces de largeur égale à l'intervalle, on a [éq. (29)]

$$Y_{11} - Y_{12} = j\left(\frac{2}{p_x}\right)\sin\frac{\varphi}{2},$$

d'où

$$\operatorname{tg}\frac{kd}{2} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}. \qquad (41)$$

La figure 13 représente une ligne interdigitale multiple limitée transversalement

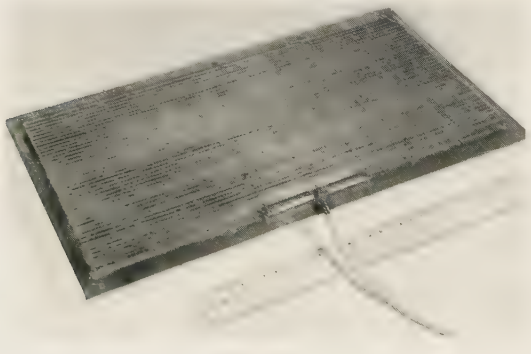


Fig. 13.

Les caractéristiques théoriques et expérimentales sont données par la figure 14 pour le mode $\varphi_3 = \frac{\pi}{2}$. Le léger écart observé serait réduit si l'on tenait compte de l'inductance des connexions barreaux-masse.

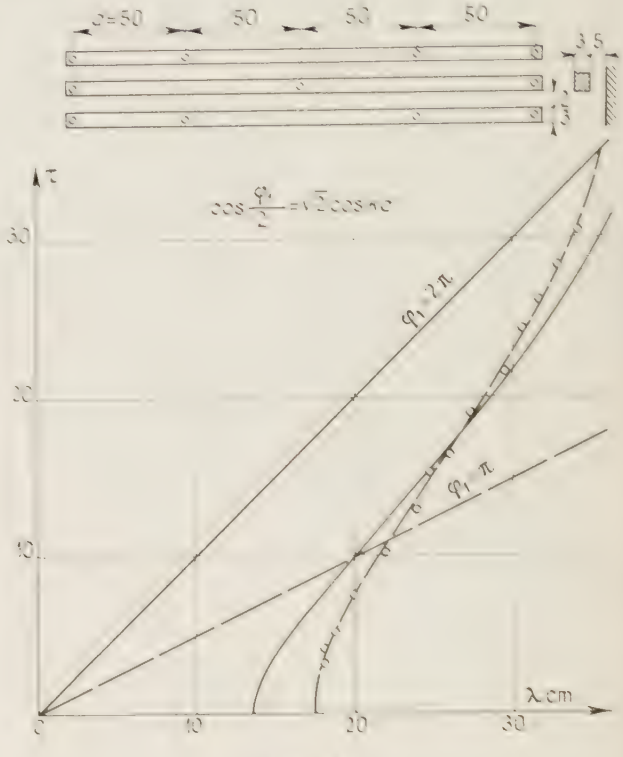


Fig. 14.

11. LIGNE EN MÉANDRE MULTIPLE.

Cette structure représentée sur la figure 15 comporte deux connexions. Il faut donc introduire quatre sources de courant par cellule. En écrivant que la tension entre les extrémités des connexions est nulle, on obtient

$$\frac{F(d)\,F(-d)}{F_0\,F_0} = \frac{\begin{vmatrix} (Z_{12}+Z_{21}-Z_{11}-Z_{22}) & \\ -(Z_{21}e^{j\varphi}+Z_{12}e^{-j\varphi}-Z_{22}-Z_{11}) & \\ -(Z_{22}+Z_{11}e^{-j\varphi}-Z_{21}-Z_{12}e^{-j\varphi}) & \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}}.$$

Cette caractéristique de dispersion est bien identique à celle de la structure complémentaire [éq. (40)] en tenant compte de la relation (33) entre les Y^{II} et Z^{I}.

Dans le cas plus simple où $p_x = 2d$ et où tous les barreaux sont identiques et disposés périodique-

ment, (42) s'écrit, en tenant compte de (27) et (23),

$$\frac{Y\left(\frac{\varphi_1}{2}, \varphi_2\right)}{Y\left(\frac{\varphi_1-\pi}{2}, \varphi_2\right)} = \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_1}{4} \cdot \frac{\cos\frac{\varphi_3}{2} + \cos kd}{\cos\frac{\varphi_3}{2} - \cos kd}. \tag{43}$$

Si, en outre, les bandes sont infiniment minces et de largeur égale à celle des intervalles :

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{4} = \frac{\cos\frac{\varphi_3}{2} - \cos kd}{\cos\frac{\varphi_3}{2} + \cos kd}.$$

Si l'on ne tient compte que de la capacité γ_M entre les barreaux et la masse (*fig.* 15 *b*) et en éliminant la périodicité $\mathbf{p}_2$, (43) devient

$$\operatorname{tg}^2\frac{\varphi_1}{4} = \frac{\cos\frac{\varphi_3}{2} - \cos kd}{\cos\frac{\varphi_3}{2} + \cos kd} \tag{44}$$

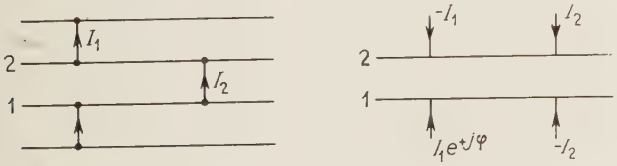
et, pour $\varphi_3 = 0$ (méandre simple),

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{4} = \pm \operatorname{tg}\frac{kd}{2} \tag{45}$$

dont la solution principale est

$$\varphi_1 = 2kd. \tag{46}$$

On peut se représenter dans ce cas la propagation comme une onde T. E. M. se déplaçant à la vitesse c entre les barreaux et la masse.



(a) $V_1(0)e^{-j\varphi} - V_2(0) = 0$

$V_1(\sigma) - V_2(\sigma) = 0$

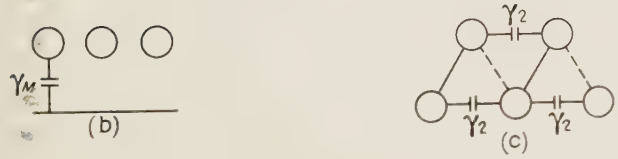


Fig. 15.

Considérons maintenant le cas où seule est notable la capacité entre barreaux homologues adjacents. On obtient ainsi l'hélice multiple (*fig.* 15 *c*) dont la dispersion s'écrit

$$\cos kd = \cos\frac{\varphi_3}{2}\cos\frac{\varphi_2}{2}. \tag{47}$$

La figure 16 donne un résultat expérimental concernant le méandre multiple.

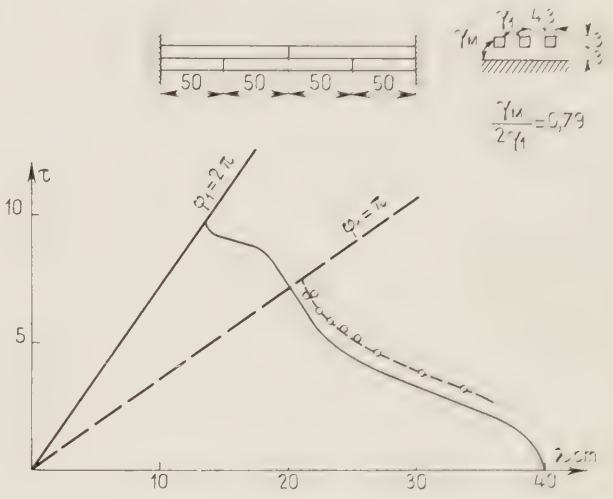
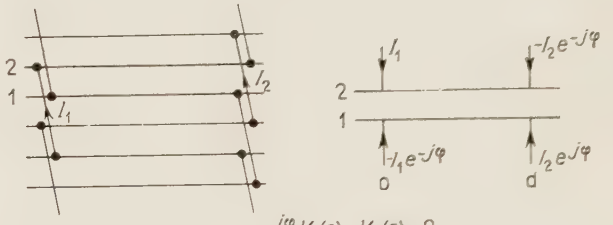


Fig. 16.



$e^{j\varphi} V_1(0) - V_2(0) = 0$

$V_1(\sigma) - V_2(\sigma) e^{2j\varphi} = 0$

Fig. 17.

12. LIGNE EN TRIPLE MÉANDRES MULTIPLES.

En suivant le schéma de la figure 17 on obtient une expression d'apparence assez voisine de celle du méandre multiple :

$$\frac{F(d)}{F(0)}\frac{F(-d)}{F(0)} = \frac{\left\{\begin{array}{l}(-Z_{11} + Z_{12}e^{j\varphi} - Z_{22} + Z_{21}e^{-j\varphi}) \\ \times (Z_{11}e^{j\varphi} - Z_{12}e^{-j\varphi} + Z_{22} - Z_{21}e^{-j\varphi})\end{array}\right.}{\left\{\begin{array}{l}(Z_{11}e^{2j\varphi} - Z_{12} + Z_{22}e^{-j\varphi} - Z_{21}e^{j\varphi}) \\ \times (Z_{12} - Z_{11}e^{-j\varphi} - Z_{22}e^{2j\varphi} + Z_{21}e^{j\varphi})\end{array}\right.}. \tag{48}$$

Dans le cas où l'on ne tient compte que de la capacité barreau-masse, le terme de droite s'écrit simplement

$$\frac{1}{\cos^2 \frac{3\varphi}{2}}$$

et la dispersion $\left(d = \frac{p}{2}\right)$

$$\cos kd = \cos \frac{3\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2}. \tag{49}$$

Ce résultat est évident si l'on remarque que cette structure est en fait constituée de trois méandres multiples imbriqués, dont le pas est le triple du pas de la structure complète.

CONCLUSION.

Cette étude a montré que la propagation d'ondes électromagnétiques dans les systèmes multifilaires tripériodiques pouvait être calculée sur des bases théoriques assez simples. Un bon accord est obtenu avec l'expérience lorsque la vitesse de phase de l'onde guidée ne diffère pas trop de la vitesse de groupe et reste très inférieure à la vitesse de l'onde libre.

Remarquons que les équations initiales devraient être modifiées si l'on voulait tenir compte directement de la présence de milieux non réciproques ou actifs (maser à onde progressive, systèmes à ferrites). En outre, le calcul explicite de la vitesse d'énergie et de l'intensité du champ haute fréquence serait nécessaire pour l'étude du couplage avec un faisceau, ou du couplage de deux structures bipériodiques.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] R. Warnecke, P. Guénard et O. Doehler, *Phénomènes fondamentaux dans les tubes à ondes progressives* (*Onde électr.*, t. 34, 1954, p. 328).

[2] R. Warnecke, O. Doehler et P. Guénard, *Sur les lignes à retard en forme de peigne et de circuit interdigital et sur leur schéma équivalent* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 231, 1950, p. 1220-1221).

[3] J. Arnaud et F. Diamand, *Lignes à retard pour tubes à propagation d'onde de grande puissance*, Congrès Tubes hyper, Munich, 1960.

[4] R. M. White, C. K. Birdsall et R. W. Grow *Multiple ladder circuit for millimeter wavelength tubes* (*Proc. Inst. Radio Engrs.*, part B, t. 105, 1958, p. 609).

[5] J. Laborderie, G. Vincent et T. Yeou, *Carcinotrons millimétriques*, Congrès Tubes hyper, Paris, 1956.

[6] G. Mourier, *Circuits à structure périodique à deux et trois dimensions. Applications possibles aux tubes à onde progressive*, Congrès Tubes hyper, Paris, 1956.

[7] O. Doehler et G. Mourier, *Theory of two dimensional traveling wave tube*, Congrès Tubes hyper, Munich, 1960.

[8] R. W. de Grasse, E. O. Schulz Dubois et H. E. D. Scovil, *The three-level solid state traveling wave maser* (*Bell Syst. Techn. J.*, vol. 38, 1959, p. 305).

[9] R. M. Bevensee, *Electromagnetic slow wave systems*, John Wiley and Sons, New-York.

[10] L. V. Bewley, *Traveling waves on transmission systems*, John Wiley and Sons, New-York, 1951.

[11] J. R. Pierce, *Propagation in linear arrays of parallel wires* (*I. R. E. Trans. on electron devices*, ED 2, n° 1, 1955, p. 13-14).

[12] R. C. Fletcher, *A broad band interdigital circuit* (*Proc. Inst. Radio Engrs.*, vol. 40, 1952, p. 951-957).

[13] A. Leblond et G. Mourier, *Étude des lignes à barreaux à structure périodique pour tubes électroniques U. H. F.* (*Ann. Radioélectr.*, n^{os} 4 et 10, 1954).

[14] B. Epsztein et J. Arnaud, *Research on multidimensional structures*, 1955-1956; Contrat ONR-CSF; *cf.* également [15], [16], [17].

[15] O. Doehler, B. Epsztein et J. Arnaud, *Nouveaux types de lignes pour tubes hyperfréquences*, Congrès Tubes hyper, Paris, 1956.

[16] J. Arnaud, *Theory of bar lines*, in *Crossed field microwave devices*, Academic Press, New-York.

[17] *Research on multidimensional structures CSF-MWDP contract. Final report*, 1960.

[18] J. Arnaud, *Structures multi-périodiques pour tube à propagation d'onde de grande puissance. Application au maser.* Thèse, 1963.

[19] L. Brillouin et M. Parodi, *Propagation des ondes dans les milieux périodiques.* Masson Ed., 1956.

ANNEXE.

CALCUL DES STRUCTURES EN BANDES.

Le champ complexe conjugué doit obéir aux conditions suivantes [1] :

— être purement imaginaire sur les bandes;

— être purement réel entre les bandes par raison de symétrie;

— être analytique sauf aux bords des bandes où il doit varier en $(Z - z_i)^{\frac{1}{2}}$, z_i étant la coordonnée d'un bord de bande (points de branchement); il ne doit pas présenter d'autres singularités qui correspondraient à des lignes de charge supplémentaires, et il doit tendre vers zéro à l'infini.

On voit que la solution

$$E^*(Z) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} a_n Z^n}{\sqrt{\prod_{i=1}^{2N} (Z - z_i)}};$$

N étant le nombre de bandes, satisfait à ces conditions.

Le radical conduit bien à un champ imaginaire sur les bandes et réel entre les bandes.

Le polynome du numérateur ne présente pas de singularités et $E(Z)$ tend bien vers zéro pour $|Z| \to \pm\infty$, car la puissance du numérateur est inférieure d'une unité à celle du dénominateur. Les a_n doivent être déterminés par la distribution de potentiel imposé.

Considérons maintenant le cas de bandes de largeur T disposées périodiquement avec un pas p.

Si le nombre de bandes est pair, les z_i s'écrivent avec une origine placée au milieu de deux bandes :

$$z_i = \pm\left[\frac{T}{2} + (2n-1)\frac{p}{2}\right] \qquad \left(1 \leq n \leq \frac{N}{2}\right).$$

En utilisant l'identité [2]

$$\cos\alpha = \prod_{n=1}^{\infty}\left[1 - \left(\frac{2\alpha}{(2n-1)\pi}\right)^2\right],$$

on fait apparaître au dénominateur, pour un nombre infini de bandes,

$$\left[\cos\pi\left(Z - \frac{T}{2}\right)\cos\pi\left(Z + \frac{T}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Lorsque la distribution du potentiel est périodique, le numérateur doit s'écrire

$$e^{j\pi\frac{\varphi}{2\pi}\frac{Z}{p}} \qquad (0 \leq \varphi \leq 2\pi),$$

φ étant le déphasage par cellule.

La lettre j introduite ici correspond à la notation complexe dans le temps et ne doit pas être confondue avec le symbole i relatif à l'espace. De cette expression du champ on peut déduire par intégration le courant total circulant sur une bande, en utilisant les fonctions de Legendre d'indice non entier [4]. L'admittance caractéristique s'écrit

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,Y(\varphi) = 4\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| \frac{P_{\frac{\varphi}{2\pi}}\left(\cos\frac{\pi}{2}\frac{T}{p}\right)}{P_{\frac{\varphi}{2\pi}}\left(\cos\frac{\pi}{2}\frac{S}{p}\right)},$$

où

$$S = p - T.$$

Cette expression est établie et développée dans [3].

L'admittance de barreaux rectangulaires épais peut être obtenue sous forme de développements en série ou d'une transformation conforme [5].

BIBLIOGRAPHIE.

[1] P. N. Butcher, *Ligne en échelle à barreaux plats : propagation*, Congrès Tubes hyper, Paris, 1956.

[2] Copson, *An introduction to the theory of functions of a complex variable*, p. 147, Oxford Press.

[3] Chiao Min Chu, *J. A. P.*, n° 1, 1958, p. 88-99.

[4] Magnus et Oberhettinger, *Functions of mathematical physics*, Chelsea, p. 66.

[5] R. R. Moats, *The interdigital line as a wave guide*, in *crossed field microwave devices*, p. 69, Academic Press.

ABRIDGMENT.

TRI-PERIODICAL MULTI-WIRE LINES

By J. Arnaud. p. 232

A great number of devices use multi-wire systems as delay lines; this applies to travelling wave tubes and to travelling wave Masers. Bi-periodical or tri-periodical complex structures have already been used in experimental tubes. The essential problem that arises is that of mode selection. Tubes using circular lines, such as the coaxial travelling wave tube, lead to more advantageous situations than plane tubes. The use of truly bi-dimensional structures may be considered in the future if large vacuum chambers are available.

This article is limited to bar structures and to the method of calculation based on the theory of multi-wire lines originally used by R. C. Fletcher for the interdigital line. This article deals with the general case of uniform bars by substituting sources of voltage and current for the obstacles distributed along the bars. The characteristic of the system is obtained in the form of a fairly simple determinant. It is shown how Babinet's principle is applicable to complementary plane structures by establishing a relation between the linear capacities γ^{II} and the linear inductances λ^{I} of the two structures

$$\gamma^{II}_{2m\,2n} = \frac{4\varepsilon_0}{\mu_0}\left(\lambda^{I}_{2m+1\,2n+1} + \lambda^{I}_{2m-1\,2n-1} - \lambda^{I}_{2m+1\,2n-1} - \lambda^{I}_{2m-1\,2n+1}\right).$$

For the case when the obstacles are periodically distributed it is possible to make the sum $F(x)$ of the effects of the periodical sources and obtain the potential of a bar at any point. If the structure includes two obstacles per section, a distance d apart, there appears the quantity

$$\frac{F(d)\,F(-d)}{F(o)\,F(o)} = \left(\frac{\cos\frac{\varphi_3}{2}}{\cos kd}\right)^2$$

if $d = \frac{|P_3|}{2}$. P_3 is the periodicity, φ_3 is the phase difference per section and $k = \frac{\omega}{c}$.

Since the bars are distributed in a doubly periodic system it is necessary to introduce a matrix admittance Y_{rR}. The classical line theory is still valid when using this matrix admittance; in some cases of symmetry it can be reduced to a simpler admittance.

The article then deals with the general case of the multiple interdigital line, for which the dispersion is

$$\frac{F(d)\,F(-d)}{F(o)\,F(o)} = \frac{Y_{11}\,Y_{22}}{Y_{12}\,Y_{21}}.$$

The indices r and R of Y_{rR} can have the values 1 and 2 and identify the two bars of the cell.

A structure formed of sections of isolated conductors (interrupted bar line) has an identical dispersion characteristic.

The dispersion of the multiple meander (or of the multiple helix) is more complex but it also satisfies the equation given above in the case of thin complementary strips.

Lastly the article deals with the case of a new structure : the triple multiple meander; in spite of the apparent complexity the result is readily obtained.

In these calculations attention has been given to the relations which exist between the different structures and it is shown how the general relations obtained are expressed in the simpler cases previously described.

A few experimental results show agreement with theory. Other experimental results were given in the thesis on which this article is based.

ZUSAMMENFASSUNG.

DREIFACHPERIODISCHE MEHRADERNLEITUNGEN

Von J. Arnaud. s. 232

Zahlreiche Vorrichtungen verwenden als Verzögerungsleitungen Mehradernleitungen; das ist der Fall der Wanderwellenleitungen und der Wanderfeldmaser. Komplexe zweifach- bezw. dreifachperiodischen Strukturen sind bereits in experimentellen Röhren verwendet worden. Das wichtigste Problem, welches sich stellt, ist das der Wahl der Schwingmodi. Die Röhren, welche kreisförmige Leitungen verwenden, wie die koaxial-T. P. O. M.-Röhren führen zu günstigeren Lösungen als die Planröhren. Der Einsatz von wirklich zweidimensionalen Strukturen kann in der Zukunft ins Auge gefasst werden, wenn man über grosse Vakuumbehälter verfügt.

ZUSAMMENFASSUNG.

Dieser Aufsatz ist auf die Gitterstrukturen beschränkt, sowie auf das Rechenverfahren, welches auf der Theorie der Mehradernleitungen beruht, welche anfangs von R. C. Flechter für die Kammleitungen mit verschachtelten Zähnen eingesetzt wurde. Dieser Aufsatz behandelt den allgemeinen Fall von einförmigen Gitterstäben, wobei die längs der Stäbe verteilten Hindernisse durch Spannungs- bezw. Stromquellen ersetzt werden. Die Charakteristik des Systems wird in Form eines verhältnissmässig einfachen Determinanten erhalten. Man zeigt dann, wie das Babinet'sche Prinzip an plane komplementare Strukturen angewandt werden kann, indem man eine Beziehung zwischen den Leitungskapazitäten γ^{II} und den Leitungsinduktanzen λ^{I} der beiden Strukturen aufstellt

$$\gamma^{II}_{2\,m\,2\,n} = \frac{4\varepsilon_0}{\mu_0}(\lambda^{I}_{2\,m+1\,2\,n+1} + \lambda^{I}_{2\,m-1\,2\,n-1} - \lambda^{I}_{2\,m+1\,2\,n-1} - \lambda^{I}_{2\,m-1\,2\,n+1}).$$

Im Falle, wo die Hindernisse periodisch verteilt sind, kann man die Summe $F(x)$ der Wirkungen der periodischen Quellen aufstellen und das Spannungspotential eines Stabes an einem beliebigen Punkte berechnen. Wenn die Struktur je Zelle zwei Hindernisse umfasst, mit einem Abstand d führt sich folgende Grösse ein

$$\frac{F(d)\,F(-d)}{F(0)\,F(0)} = \left(\frac{\cos\frac{\varphi_3}{2}}{\cos kd}\right)^2$$

wenn man $d = \frac{|p_3|}{2}$ setzt, wobei p_3 die Periode und φ_3 die Phasenverschiebung je Schritt darstellt, und $k = \frac{\omega}{c}$.

Da die Stäbe gemäss einem doppeltperiodischen Gitter verteilt sind, wird man dazu geführt eine Matrizenleitwert Y_{rR} einzuführen; die konventionelle Theorie der Leitungen ist noch gültig, wenn man diesen Matrizenwert verwendet; bei gewissen Symmetriefällen kann er auf einen einfacheren Leitwert zurückgeführt werden.

Man behandelt dann den allgemeinen Fall der Mehrfachleitungen mit kammartigen Leitern mit verschachtelten Zähnen deren Dispersion folgende Form nimmt

$$\frac{F(d)\,F(-d)}{F(0)\,F(0)} = \frac{Y_{11}\,Y_{22}}{Y_{12}\,Y_{21}},$$

wobei die Indizien r und R von Y_{rR} die Werte 1 und 2 annehmen können, welche die Gitter der Zelle bezeichnen.

Eine Struktur, die von isolierten Leiterstrecken gebildet wird (Leitung mit unterbrochenen Gittern) bietet eine ähnliche Dispersionscharakteristik. Die Dispersion der Mehrfach-Mäanderleitung (bezw. der Mehrfach- Spiralleitung) ist komplizierter, aber sie kann ebenfalls auf die hier im Falle dünner komplementärer Streifen geschriebene Gleichung zurückgeführt werden.

Man behandelt zum Schluss den Fall einer neuen Struktur : die dreifach Mäander-Mehradernleitung; trotz der scheinbaren Kompliziertheit kann das Resultat bequem erhalten werden.

In diesen Rechnungen hat man sich bemüht die Beziehungen anzugeben, die zwischen den verschiedenen Strukturen bestehen und zu zeigen wie die allgemeinen Beziehungen, die man aufgestellt hat, in den einfachsten oben behandelten Fällen geschrieben werden können.

Einige Versuchsergebnisse zeigen die Uebereinstimmung mit der Theorie. Andere Versuchsergebnisse sind in der Dissertation angeführt, aus der dieser Aufsatz gezogen ist.

Imprimerie GAUTHIER-VILLARS
55, quai des Grands-Augustins, 55
Paris (6e) 171503

Imprimé en France.